

高雄市正義中學高中部 111 學年度第一學期第一次期中考數學科試題卷

【高三社會組/自然組】

命題教師：吳孟珍

◆ 請將答案直接書寫在試題卷上

第一部分：單一選擇題 (每題 4 分，共 20 分)

1. 坐標平面上，已知直線 L 過點 $A(k, 2)$ 和點 $B(-2, k)$ ，且直線 L 與直線 $3x + y = 5$ 平行，則實數 k 的值為下列哪一個選項？
(1) -4 (2) -1 (3) 0 (4) 1 (5) 4
2. 滿足不等式 $2(x-1)^2(x+2)^2 \leq (x-1)^3(x+2)$ 的整數解個數為下列哪一個選項？
(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個
3. 核廢水中含有十幾種放射性物質，其中的碳-14，它能融入蛋白質、核酸，特別是 DNA 細胞組織中，會造成 DNA 損傷而致使細胞死亡或潛在的遺傳突變，更嚇人的是它的半衰期長達 5730 年，即其濃度降為原來的一半須經歷 5730 年，由此推知，若其濃度要降為原來的 $\frac{1}{10}$ 須經歷約多少年？
(1) 15000 (2) 19000 (3) 21000 (4) 23000 (5) 25000
4. 阿珍規劃高三總複習的進度，在接下來連續六天中，有三天要安排國文、英文和數學三種課程各一天，且此三種課程不能連續排在相鄰三天(安排兩課程相鄰是可以的，例如國文英文排在第一天及第二天，數學只要不排在第三天即可)。若不論剩餘三天是否安排課程，請問安排課程的方法有幾種？
(1) 24 種 (2) 72 種 (3) 84 種 (4) 96 種 (5) 120 種
5. 試問有多少個整數 x 滿足 $10^9 < 2^x < 9^{10}$ ？(已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$)
(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 0 個

第二部分：多重選擇題 (每題 5 分，共 25 分)

1. 下列各方程式中，請選出有實數解的選項。

- (1) $|x| + |x-5| = 1$ (2) $|x| + |x-5| = 6$ (3) $|x| - |x-5| = 1$ (4) $|x| - |x-5| = 6$
(5) $|x| - |x-5| = -1$

2. 已知 $f(x) = (x^2 + x + x)(x-1) + 3$ ， $g(x) = x^3 - 1$ ，下列哪些選項正確？

- (1) $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式是二次式
(2) $f(x) \times g(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 3
(3) $f(x) \times g(x)$ 的展開式中， x^5 項的係數為 0
(4) $y = f(x)$ 的圖形與 $y = g(x)$ 的圖形恰只有一個交點
(5) $(0, 1)$ 是 $y = f(x)$ 圖形的對稱中心

3. 已知實係數二次多項式函數 $y = f(x)$ 的圖形與軸交於 $(1, 0)$ 、 $(2, 0)$ 兩點；實係數二次多項式函數 $f(x) + g(x) \geq 0$ 的圖形與軸交於 $(1, 0)$ 、 $(3, 0)$ 兩點，則不等式的解可能為下列哪些選項？

- (1) $x = 1$ (2) $x \leq 1$ (3) $x \leq 0$ 或 $x \geq 4$ (4) $x \leq 1$ 或 $x \geq 3$ (5) x 為任意實數

4. 某家科技公司共有 456 名員工，經過健康檢查後發現這些員工的平均年齡恰為 40 歲，標準差為 3 歲，血壓 (y) 對年齡 (x) 的最適直線為 $y = 1.2x + 70$ (x 的單位為歲， y 的單位為毫米水銀) 下列哪些選項正確？

- (1) 血壓 (y) 對年齡 (x) 有正相關
(2) 456 名員工的平均血壓為 120 毫米水銀
(3) 若 456 名員工血壓的標準差為 6 毫米水銀，則 x 與 y 的相關係數為 0.6
(4) 若血壓的單位改成厘米水銀，則最適直線的斜率仍是不會改變
(5) 若血壓的單位改成厘米水銀，則最適直線的方程式仍是不會改變

5. 設 α, β 均為第二象限角，若 $\sin \alpha > \sin \beta$ ，試選出正確的選項。

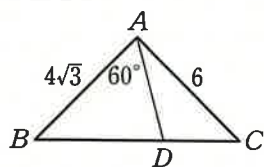
- (1) $\alpha < \beta$
(2) $\cos \alpha < \cos \beta$
(3) $\sin \alpha > \cos \beta$
(4) $\sin(180^\circ + \alpha) < \sin(180^\circ + \beta)$
(5) $\sin(90^\circ + \alpha) > \sin(90^\circ + \beta)$

第三部分：填充題 (共45分)

1. $A(1, -2)$ 、 $B(-2, 4)$ ， $L: 2x - 3y + k = 0$ ，若 $\overline{AB}$ 與 L 相交，則實數 k 的範圍為_____。

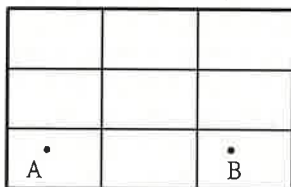
2. 八張分別標有 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 的卡片任意分成兩組，每組四張，則標號 1 與 2 的兩張分別在同一組的機率為_____。

3. $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 4\sqrt{3}$ ， $\overline{AC} = 6$ ， D 在 $\overline{BC}$ 上使得 $\angle BAD = 60^\circ$ ，求 $\overline{AD} =$ _____。



4. $\triangle ABC$ 中， M 為 $\overline{BC}$ 中點，若 $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{AC} = 4$ ，且 $\angle BAC = 120^\circ$ ，則 $\tan \angle AMB =$ _____。

5. 附圖中至少包含 A 或 B 兩點之一的長方形共_____個。



6. 五件相異物，全部分給甲乙丙三人，每人至少一件之分法有_____種。

7. 已知座標平面的原點為 O 點，且圓 $C: x^2 + y^2 = 2$ 和直線 $L: y = mx + k$ 相交於 A, B 兩點，其中 m, k 為實數。設 L 與 x 軸正向的夾角為 60° ，且 $\angle AOB = 90^\circ$ ，則實數 $k =$ _____。

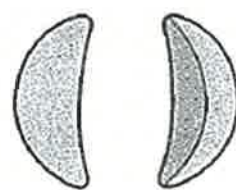
8. 若 x, y 為兩正實數，且滿足 $x^{\frac{-1}{3}}y^2 = 1$ 及 $2 \log y = 1$ ，則 $\frac{x - y^2}{10} =$ _____。

第四部分：混合題或非選擇題 (佔 10 分，此部分請寫出詳細計算過程)

說明：本部分共有 1 題組，每一組題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。

非選擇提請由左而右橫式書寫，作答時需寫出計過程或理由，否則將酌予扣分。

每年過年期間阿珍都會親自到紫南宮向土地公、土地婆焚香祈福求發財金，期望一整年能夠好運發財。如圖(1)，求發財金的方式是透過「擲筊」：拿兩個相同且有正反兩面的筊杯往地上丟擲，出現一個正面一個反面的情形稱為「聖筊」。若第一次就獲得「聖筊」，可求金 600 元；若第一次未獲「聖筊」，可再次向土地公、土地婆行禮許願後擲筊，如在第二次獲得「聖筊」者，可求金 500 元。如此規則，若一開始連續沒擲得「聖筊」，但依序在第三次、第四次、第五次、第六次才出獲「聖筊」者，可求金 400 元、300 元、200 元、100 元。若連續六次均未獲得「聖筊」者，則請下次再來祈福許願求金。



圖(1)

假設每個筊杯出現正反面的機率一樣，試回答下列的問題。

1. 阿珍今年求到 300 元的機率是_____。(3 分)
2. 假設求到發財金 $100 \times k$ 元的機率為 P_k ，其中 $k=1,2,3,4,5,6$ ，

試選出正確的選項。(3 分)

(1) $P_1 + P_3 + P_5 = P_2 + P_4 + P_6$

(2) $P_1 + P_2 = 2P_3$

(3) $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$

(4) $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ 是等比數列

(5) 阿珍求到發財金的期望值為 $\frac{100+200+300+400+500+600}{6}$ 元

3. 阿珍求發財金時擲筊次數的期望值是幾次?(4 分)

高雄市正義中學高中部 111 學年度第一學期第一次期中考數學科答案卷

【高三社會組/自然組】

命題教師：吳孟珍

高三年_____班 座號：_____ 姓名：_____

第一部分：單一選擇題 20% (每題 4 分)

1	2	3	4	5
1	5	2	4	2

第二部分：多重選擇題 25% (每答對一選項得 1 分，答錯不倒扣)

1	2	3	4	5
235	345	125	13	345

第三部分：填充題 45% (配分如下量尺)

1	$-8 \leq k \leq 16$	2	$\frac{3}{7}$	3	$\frac{8}{3}\sqrt{3}$	4	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
5	15	6	150	7	± 2	8	99

答對題數	1	2	3	4	5	6	7	8
得分	8	16	24	30	34	37	41	45

第四部分：混合題或非選擇題 (佔 10 分，此部分請寫出詳細計算過程)

說明：本部分共有 1 題組，每一組題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。

非選擇提請由左而右橫式書寫，作答時需寫出計過程或理由，否則將酌予扣分。

- 阿珍今年求到 300 元的機率是_____。(3 分)
- 假設求到發財金 $100 \times k$ 元的機率為 P_k ，其中 $k=1,2,3,4,5,6$ ，試選出正確的選項。(3 分)
 - $P_1 + P_3 + P_5 = P_2 + P_4 + P_6$
 - $P_1 + P_2 = 2P_3$
 - $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$
 - $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ 是等比數列
 - 阿珍求到發財金的期望值為 $\frac{100+200+300+400+500+600}{6}$ 元
- 阿珍求發財金時擲筊次數的期望值是幾次?(4 分)

由於筊杯出現正反面的機率一樣，

所以擲筊一次得『聖筊』的機率是 $\frac{1}{2}$ 。

根據規則，前三次都不是『聖筊』，第四次是『聖筊』，

可求到發財金 300 元，所以機率為 $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$ 。

設獎金 x 元的機率為 $P(x)$ ，由題意得知，

x	600	500	400	300	200	100	0
$P(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^5}$	$\frac{1}{2^6}$	$\frac{1}{2^6}$

$$(1) \times : P_6 + P_4 + P_2 = P(600) + P(400) + P(200)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} = \frac{21}{32},$$

$$P_5 + P_3 + P_1 = P(500) + P(300) + P(100)$$

$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} = \frac{21}{64},$$

所以 $P_1 + P_3 + P_5 \neq P_2 + P_4 + P_6$ 。

(2) $\times$ ：由上表可知， $P_1 + P_2 \neq 2P_3$ 。

(3) $\times$ ：全事件還包含沒有求到發財金的事件。

(4) $\bigcirc$ ：由上表可知，正確。

(5) $\times$ ：六種金額的機率相等時，發財金 x 的期望值才是 x 值的算術平均數，所以真正的期望值為

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times 600 + \frac{1}{2^2} \times 500 + \frac{1}{2^3} \times 400 + \frac{1}{2^4} \times 300 + \frac{1}{2^5} \times 200 \\ & + \frac{1}{2^6} \times 100. \end{aligned}$$

故選(4)。

共擲 i 次的機率為 P_i ，則

i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^5}$	$\frac{2}{2^6}$

$$\begin{aligned} \text{所以 } E &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{16} + 5 \times \frac{1}{32} + 6 \times \frac{2}{64} \\ &= \frac{16+16+12+8+5+6}{32} = \frac{63}{32} (\text{次}). \end{aligned}$$