

第一部分：單一選擇題 (每題 4 分，共 20 分)

- 已知 x 為實數，則 $\frac{1-2^{x+1}}{1+2^x}$ 的值有可能是下列哪一個數？
 (A) $\frac{6}{5}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) -2 (E) 2
- 點 (a, b) 在三直線 $x+2y=4$ ， $3x+y=3$ ， $x-y=4$ 所圍成三角形的內部，則下列何者為真？
 (A) $a+2b>4$
 (B) $3a+b<3$
 (C) $a-b<4$
 (D) $a-2b<4$
 (E) $3a-b>3$
- 請問 $\sin 73^\circ$ 、 $\sin 146^\circ$ 、 $\sin 219^\circ$ 、 $\sin 292^\circ$ 、 $\sin 365^\circ$ 這五個數值的中位數是哪一個？
 (A) $\sin 73^\circ$ (B) $\sin 146^\circ$ (C) $\sin 219^\circ$ (D) $\sin 292^\circ$ (E) $\sin 365^\circ$
- 已知 $|\vec{a}|=1$ ， $|\vec{b}|=\sqrt{2}$ ， $|\vec{c}|=\sqrt{3}$ ，且 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ，下列何者為真？
 (A) $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 60°
 (B) $\vec{a} \perp \vec{b}$
 (C) 由 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所決定的三角形面積為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (D) $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{21}$
 (E) $|\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}|=2$
- 若正實數 x 、 y 、 z 滿足 $\log_2 x=13$ 、 $\log_4 y=7$ 、 $\log_8 z=5$ ，試選出最接近 $\log(3x+5y+3z)$ 之值為？
 (A) 4.6 (B) 4.9 (C) 5.1 (D) 5.3 (E) 5.6

第二部分：多重選擇題 (每題 5 分，共 25 分)

- 設 $f(x)$ 為一實係數多項式，且 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)^2$ 的餘式為 $(x-2)^2+g(x)$ ，其中 $g(x)$ 為一次多項式。請選出正確的選項。
 (A) 若知道 $f(1)$ 及 $f(2)$ ，則可求出 $g(x)$
 (B) $f(x)$ 除以 $(x-2)$ 的餘式是 $g(2)$
 (C) $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式是 $g(1)$
 (D) $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 的餘式是 $g(x)$
 (E) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式是 $x-2+g(x)$
- 某非洲國家統計境內 20 個行政區的電視機普及率 x 及人民年均收入 y (單位：百萬貝里)，並得出 y 對 x 的最適直線方程式 $y=0.8x+1.6$ ，請選出下列哪些敘述是正確的？
 (A) y 與 x 為正相關
 (B) y 與 x 為高度相關
 (C) 已知該國索泥村的電視機普及率高於三羊村，則可知索泥村的人民較三羊村富有
 (D) 若該國某一地區的電視機普及率為 50%，則可合理推估該地區的人民年均收入為 2 百萬貝里
 (E) 聯合國欲協助該國提升人民的年均收入，則可輸入電視機至該國電視機普及率低的地區
- 某班人數 60 人，在一次抽考英文、數學、化學的考試中，英文及格者有 41 人，數學及格者有 39 人，化學及格者有 42 人，英、數都不及格者有 14 人，數、化都不及格者有 13 人，英、化都不及格者有 11 人，至少一科不及格者 29 人，則下列哪些選項為真？
 (A) 三科均不及格者有 9 人
 (B) 至少兩科不及格者有 19 人
 (C) 只有英文不及格者有 3 人
 (D) 只有數學不及格者有 3 人
 (E) 只有化學不及格者有 4 人

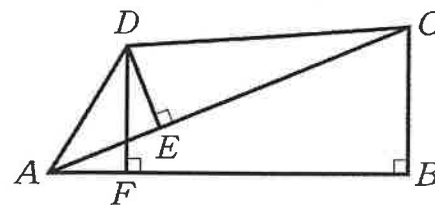
4. 已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 7 \approx 0.8451$, 若 $a=2^{26}$, $b=7^9$, 請選出正確的選項。
- (A) a 為 8 位數
 (B) ab 的最高位數字為 2
 (C) ab 為 15 位數
 (D) $a+b$ 為 8 位數
 (E) $\frac{b}{a}$ 的小數點後第 1 位不為 0
5. 下列方程式中, 哪些選項恰有兩個相異實根?
- (A) $2^{-|x|} = x^2$
 (B) $2^x = x^2$
 (C) $x-1 = \log_2 |x|$
 (D) $|\log_2 x| = x-1$
 (E) $\log_2 x = \frac{x}{2}$

第三部分：填充題 (共 45 分)

1. 試求不等式 $|x-3| + |x+4| < 11$ 的解為 (1)。
2. 過 $(-6, -6)$ 之直線 L , 被圓 $C: (x+1)^2 + (y-4)^2 = 50$ 所截的弦長為 10, 求直線 L 之斜率 (2)。
3. 小南帶 120 元打算買 10 元一枝的鉛筆一打, 不巧, 店裡無 10 元一枝的鉛筆, 但有 13 元一枝和 8 元一枝的鉛筆, 因此只好買了這兩種鉛筆共一打。如果要使這打鉛筆中含有盡可能多的 13 元一枝的鉛筆, 請問 8 元一枝的鉛筆買 (3) 枝。
4. 遞迴數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_n = a_{n-1} + f(n-2)$, 其中 $n \geq 2$ 且 $f(x)$ 為二次多項式。若 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$, $a_4 = 12$, 則 $a_5 =$ (4)。
5. 設 $0 \leq x \leq 2\pi$, 若函數 $f(x) = 2 \sin(\frac{\pi}{6} - x) - 2 \cos x$, 在 $x = \alpha$ 時有最小值 m , 求數對 $(\alpha, m) =$ (5)。
6. 在 $0 < x < \pi$ 範圍內, 兩曲線 $y = \sqrt{3} \sin x$ 與 $y = \sin 2x$ 的交點坐標為 (6)。

7. 已知函數 $f(x) = x^3 - 3x^2$, 若 $f(x)$ 的圖形在點 $(1, f(1))$ 附近的一次近似函數為 $g(x)$, 則 $g(x) =$ (7)。

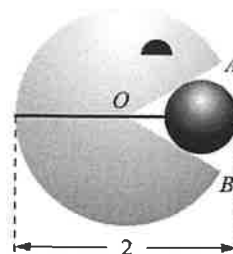
8. 如下圖, 已知 $\angle ABC = \angle DEA = \angle AFD = 90^\circ$, $\overline{AB} = 12$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{AE} = 4$, $\overline{AD} = 5$, 求 $\overline{DF} =$ (8)。



9. 在坐標平面上, 已知四邊形的頂點坐標分別為 $A(1, -3)$ 、 $B(7, -3)$ 、 $C(7, 5)$ 、 $D(1, 5)$, 若 a 、 b 為任意正實數, 且直線 $L: ax + by = 3$ 可平分四邊形面積, 則 $\frac{8}{a} + \frac{2}{b}$ 最小值為 (9)。

第四部分：素養題 (共 10 分)

1. 某城市欲設置自動資源回收機, 邀請街頭藝術家小松在機器外箱上要畫一個卡通圖案, 如圖所示, 整張圖的寬度需為 2 公尺, 小圓與大圓的兩半徑 OA , OB 均相切, 且 $\angle AOB = 60^\circ$ 。
- (1) 設小圓半徑為 x 公尺, 大圓半徑為 y 公尺, 試將寬度 2 公尺以 x 、 y 表示。
- (2) 若漆大圓每平方公尺需 120 元, 漆小圓每平方公尺需 900 元, 試以 x 、 y 表示漆該圖案所需花費。
- (3) 承上, 試問當兩圓的半徑分別為多少公尺時的花費為最小? (需求出最小花費)



高雄市正義中學高中部 111 學年度第一學期第二次期中考數學科答案卷

【高三自然組】

命題教師：王廷璋、余慕貞

高三年 3 班 座號： 姓名：

第一部分：單一選擇題 20%（每題 4 分）

1	2	3	4	5
B	C	E	B	D

第二部分：多重選擇題 25%（每答對一選項得 1 分，答錯不倒扣）

1	2	3	4	5
ABD	AD	ACD	ABE	ABDE

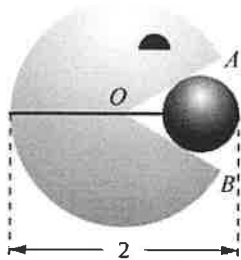
第三部分：填充題 45%（配分如下量尺）

(1)	$-6 < x < 5$	(2)	$\frac{3}{4}$	(3)	8
(4)	25	(5)	$(\frac{\pi}{3}, -2)$	(6)	$(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
(7)	$-3x+1$	(8)	$\frac{56}{13}$	(9)	$\frac{50}{3}$

答對題數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
得分	8	14	20	25	30	33	36	40	45

第四部分：素養題 10%（此部分請寫出詳細計算過程）

1. 某城市欲設置自動資源回收機，邀請街頭藝術家小松在機器外箱上要畫一個卡通圖案，如圖所示，整張圖的寬度需為 2 公尺，小圓與大圓的兩半徑 OA ， OB 均相切，且 $\angle AOB = 60^\circ$ 。
- (1) 設小圓半徑為 x 公尺，大圓半徑為 y 公尺，試將寬度 2 公尺以 x 、 y 表示。(3 分)
- (2) 若漆大圓每平方公尺需 120 元，漆小圓每平方公尺需 900 元，試以 x 、 y 表示漆該圖案所需花費。(3 分)
- (3) 承上，試問當兩圓的半徑分別為多少公尺時的花費為最小？(需求出最小花費)(4 分)



答案：(1) $3x + y = 2$ ；(2) $100\pi(y^2 + 9x^2)$ (元)；(3) $x = \frac{1}{3}$ ， $y = 1$ ， 200π 元

解析：

(1) 設小圓圓心 O' ，半徑 x 公尺

$\because \angle AOB = 60^\circ \therefore \angle AOO' = 30^\circ \Rightarrow \overline{OO'} = 2x$

圖的寬度 $2 = y + 2x + x \therefore 3x + y = 2$

(2) 花費 $= (\frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot \frac{5\pi}{3}) \times 120 + (\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot 2\pi) \times 900 = 100\pi(y^2 + 9x^2)$ (元)

(3) $(9x^2 + y^2)(1^2 + 1^2) \geq (3x + y)^2 = 4 \therefore 9x^2 + y^2 \geq 2$

“=” 成立時， $\frac{3x}{1} = \frac{y}{1}$ ，代入 $3x + y = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ ， $y = 1$

當小圓半徑為 $\frac{1}{3}$ 公尺，大圓半徑為 1 公尺時，所需花費 $100\pi \times 2 = 200\pi$ (元) 為最小