

第一部分：單一選擇題 (每題 5 分，共 15 分)

1.  $1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} = ?$

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3
- (E) 4

2.  $\sqrt{-27} + 2\sqrt{-16} + 2\sqrt{-3} - \sqrt{-81}$  的值為：

- (A)  $5\sqrt{3}i$
- (B)  $(5\sqrt{3} - 1)i$
- (C)  $-i$
- (D)  $(\sqrt{3} - 5)i$
- (E)  $(3\sqrt{3} - 1)i$

3. 複數  $z = \sin\theta + i|\cos\theta|$ ，其中  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ，的極式為：

- (A)  $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$
- (B)  $\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) + i \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)$
- (C)  $\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) + i \sin(\frac{3\pi}{2} + \theta)$
- (D)  $\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) + i \sin(\frac{3\pi}{2} - \theta)$
- (E)  $\cos(\frac{5\pi}{2} - \theta) + i \sin(\frac{5\pi}{2} - \theta)$

第二部分：多重選擇題 (每題 5 分，共 10 分)

1. 設  $i = \sqrt{-1}$ ，則下列各敘述何者正確？

- (A)  $i^{39} = -i$
- (B)  $i^{300} = 1$
- (C)  $i^5 \cdot i^6 \cdot \dots \cdot i^{300} = 1$
- (D)  $i^5 + i^6 + i^7 + \dots + i^{300} = 0$
- (E)  $(3-i)(3-i^2)(3-i^3) = 40$

2. 複數  $-1-i$  的極式可表示為下列哪些選項？

- (A)  $\sqrt{2} ( -\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} )$
- (B)  $-\sqrt{2} ( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} )$
- (C)  $\sqrt{2} ( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} )$
- (D)  $\sqrt{2} ( \cos ( -\frac{3\pi}{4} ) + i \sin ( -\frac{3\pi}{4} ) )$
- (E)  $\sqrt{2} ( \cos \frac{13\pi}{4} + i \sin \frac{13\pi}{4} )$

第三部分：填充題 (共 50 分)

1. 化簡下列各式為標準式 (即  $a+bi$ ，其中  $a、b$  為實數)：

(1)  $\frac{4i^5 + 3i^3 + 1}{6i^9 - 3i - 3} = \underline{\hspace{1cm}}(1)\underline{\hspace{1cm}}$ 。 (2)  $-\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{-9}} = \underline{\hspace{1cm}}(2)\underline{\hspace{1cm}}$ 。

2. 求  $(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{100} + (\frac{1-i}{\sqrt{2}})^{50} + 1 = \underline{\hspace{1cm}}(3)\underline{\hspace{1cm}}$ 。

3. 試求下列各式的值：

(1)  $\frac{1}{3} (\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ) \cdot 2 (\cos 78^\circ + i \sin 78^\circ) \cdot 3 (\cos 17^\circ + i \sin 17^\circ)$   
 $= \underline{\hspace{1cm}}(4)\underline{\hspace{1cm}}$ 。

(2)  $\frac{(\cos 127^\circ + i \sin 307^\circ)(\sin 53^\circ - i \cos 233^\circ)}{\cos 510^\circ - i \sin 210^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}(5)\underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 若  $(\sqrt{3} + i)^n$  為負實數，試求正整數  $n$  的最小值 =  $\underline{\hspace{2cm}}(6)\underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 若  $(\frac{2\sqrt{3} + 2i}{2 - 2i})^n$  是實數，且  $n$  為三位數，試求  $n$  的最小值 =  $\underline{\hspace{2cm}}(7)\underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 已知  $\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ$  與  $\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ$  均為複數  $z$  的  $n$  ( $n$  為正整數) 次方根，則  $n$  的最小值是  $\underline{\hspace{2cm}}(8)\underline{\hspace{2cm}}$ ，此時  $z = \underline{\hspace{2cm}}(9)\underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 設  $z^3 = -8i$ ，且  $\text{Arg}(z)$  在第三象限，則  $z = \underline{\hspace{2cm}}(10)\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(以複數標準式  $a + bi$  表示， $a, b \in \mathbb{R}$ )

#### 第四部分：計算題 (共 25 分)

1. 試討論滿足下列關係的複數  $z$ ，在複數平面上會形成什麼圖形。請繪圖或列出算式說明。(6 分)

(1)  $|z - 1| = |z - i|$ 。

(2)  $|z - 1| + |z + 1| = 6$ 。

2. 複數平面上，設  $O$  為原點，且  $A, B$  兩點分別代表複數  $3 + 4i$  與  $1 - 2i$ 。若存在一矩形是以  $O$  為中心點， $A$  是此矩形的其中一個頂點，且有另外兩個頂點  $P, Q$  在直線  $OB$  上。請回答下列問題：(9 分)

(1) 試求  $\sin \angle AOB$  的值。

(2) 試求此矩形面積。

(3) 試以複數表示  $P, Q$  兩點所在的位置。

3. 試求以  $(Z - 2)^8 = 8 - 8\sqrt{3}i$  之根為頂點的凸多邊形外接圓之：(10 分)

(1) 圓心。

(2) 半徑。

(3) 多邊形面積。

高雄市正義中學高中部 111 學年度第二學期期中考數學科答案卷

【高三】甲

命題教師：余慕貞

高三年\_\_班 座號：\_\_ 姓名：\_\_

第一部分：單一選擇題 15% (每題 5 分)

1	2	3
A	B	C

第二部分：多重選擇題 10% (每答對一選項得 1 分，答錯不倒扣)

1	2
ABCDE	CDE

第三部分：填充題 50%

1	$0 + (-\frac{1}{3})i$	2	$0 + \frac{4}{3}i$
3	$-i$	4	$-1 + \sqrt{3}i$
5	$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	6	6
7	108	8	8
9	$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	10	$-\sqrt{3} - i$

第四部分：計算題 25% (此部分請寫出詳細計算過程)

1. 試討論滿足下列關係的複數  $z$ ，在複數平面上會形成什麼圖形。請繪圖或列出算式說明。(6 分)
- (1)  $|z-1| = |z-i|$ 。 (2)  $|z-1| + |z+1| = 6$ 。

(1) 直線, (2) 橢圓

2. 複數平面上，設  $O$  為原點，且  $A, B$  兩點分別代表複數  $3+4i$  與  $1-2i$ 。若存在一矩形是以  $O$  為中心點， $A$  是此矩形的其中一個頂點，且有另外兩個頂點  $P, Q$  在直線  $OB$  上。請回答下列問題：(9 分)
- (1) 試求  $\sin \angle AOB$  的值。(2) 試求此矩形面積。(3) 試以複數表示  $P, Q$  兩點所在的位置。

(1)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ , (2)  $20\sqrt{5}$ , (3)  $\sqrt{5} - 2\sqrt{5}i, -\sqrt{5} + 2\sqrt{5}i$

3. 試求以  $(z-2)^8 = 8 - 8\sqrt{3}i$  之根為頂點的凸多邊形外接圓之：(10 分)
- (1) 圓心。(2) 半徑。(3) 多邊形面積。
- (1) 圓心  $2+0i$ , (2) 半徑  $\sqrt{2}$ , (3) 面積  $4\sqrt{2}$