高雄市正義中學高中部111學年度第二學期第一次期中考數學科試題

【高二自然組】 **命題教師：吳孟珍**

第一部分：單一選擇題 (每題4分，共20分)

1. 已知點 $P(2,4,-3)$為空間中的一定點，O為原點，則下列敘述何者正確？

(1) $\overrightarrow{OP}$在 xz 平面的投影向量長$=4$
(2) P 點到 z 軸的距離$=3$
(3) P 點在 yz 平面上的投影點為$(0,-3,4)$
(4) P 點相關於 z 軸的對稱點為$(-2,-4,-3)$
(5) P 點相關於 xy 平面的對稱點為$(2,4,0)$

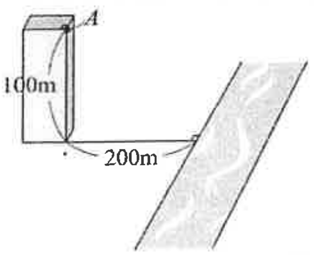
2. 關於平面或空間的幾何敘述，下列哪一個選項正確？

(1)平面上，任意兩相異直線一定有公垂線（仍在該平面上）
(2)空間中一線段的垂直平分線只有一條
(3)空間中任意三相異點可決定一平面
(4)給定一平面 E 及任意一點 P，則恰有一平面過 P 點且與 E 垂直
(5)兩歪斜線既不平行也不相交

3. 給定相異兩點 A、B，試問空間中能使ΔPAB成一正三角形的所有點P所成集合為下列哪一選項？

(1)兩個點 (2)一線段 (3)一直線 (4)一圓 (5)一平面

4. 如附圖，在100公尺高且垂直地面的觀景臺上，俯望成直線的河流。已知觀景臺底到河流的最近點是200公尺，求觀景臺上 A 點到河流的最短距離為多少？



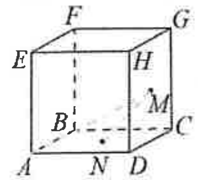
(1)100 (2)$100\sqrt{3}$ (3)200 (4)$100\sqrt{5}$ (5)300

5. 設 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 是空間向量，且 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=6$，求 $(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=$

(1)0 (2)6 (3)12 (4)-6 (5)-12

第二部分：多重選擇題 (每題5分，共25分)

1. 附圖為一正立方體，稜長為2，若 M,N 分別為正方形 $CDHG$ 與正方形 $ABCD$ 的中心，試選出正確的選項。



(1) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ (2) $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ (3) $|\overrightarrow{MN}|=2$

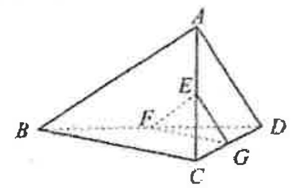
(4) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MN}=3$ (5)$\angle AMN$ 小於 $30°$

2.空間中有一四面體 $ABCD$，假設 $\overrightarrow{AD}$ 分別與 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 垂直，請選出正確的選項。

(1) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
(2) 若 $\angle BAC$ 是直角，則 $\angle BDC$ 是直角
(3) 若 $\angle BAC$ 是銳角，則 $\angle BDC$ 是銳角
(4) 若 $\angle BAC$ 是鈍角，則 $\angle BDC$ 是鈍角
(5) 若 $\overline{AB}<\overline{DA}$ 且 $\overline{AC}<\overline{DA}$，則 $\angle BDC$ 是銳角

3.如右圖，在四面體 ABCD 中，E、F、G 分別為線段 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$、$\overline{CD}$ 的中點，且滿足 $\overline{AD}=3$，$\overline{BC}=4$，$\overline{EF}=\sqrt{6}$。設 $\overrightarrow{DA}$ 與 $\overrightarrow{CB}$ 的夾角為 θ，試選出正確的選項。

(1) 直線 $\overline{AD}$ 與直線 $\overline{BC}$ 歪斜 (2) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{EF}$ 平行
(3) $\overrightarrow{AD}$ 與 $\overrightarrow{EG}$ 平行 (4) $\theta<\frac{\pi}{3}$ (5) $|\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{CB}|=10\sqrt{2}$



4. 下列哪些選項中的行列式與 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ 相等？(多選)

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & a_3+a_1 & a_3 \\ b_1+b_2 & b_3+b_1 & b_3 \\ c_1+c_2 & c_3+c_1 & c_3 \end{vmatrix}$

(4) $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 2b_1 & b_2 & b_3 \\ 2c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ \frac{1}{2}b_1 & b_2 & b_3 \\ \frac{1}{2}c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

5. 設 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 為空間中不平行的非零向量，下列哪些正確？

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$ (2)$|2\vec{a}\times3\vec{b}|=|3\vec{a}\times2\vec{b}|$ (3)$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=0$

(4)$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ (5)$|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=|\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})|$

第三部分：填充題（共45分）

1. 設 $A(-2,0,7)$，$B(3,5,-3)$，若 P 點在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$，則 P 點坐標為＿＿＿＿＿。

2. $\overrightarrow{a}=(1,1,2)$，$\overrightarrow{b}=(3,1,3)$，則 $|2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}|=$＿＿＿。

3. 三點 $A(1,3,5)$，$B(-2,0,1)$，$C(2,a,b)$ 共線，則 $a+b=$＿＿＿。

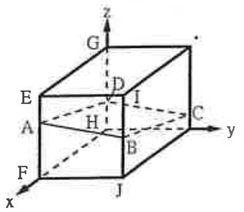
4. 設 $\overrightarrow{a}=(0,3,4)$，$\overrightarrow{b}=(1,2,2)$，$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$，若 $\overrightarrow{c}$ 平分 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 的夾角，則實數 t 的值為＿＿＿。

5. 設 $\triangle ABC$ 三頂點的坐標為 $A(1,5,2)$，$B(4,-1,8)$，$C(10,-1,-4)$，則 $\triangle ABC$ 的面積為＿＿＿。

6. 設 $A(1,1,0)$，$B(1,0,1)$，$C(0,1,1)$ 是正四面體的三頂點，且 D 點在第一卦限，試求第四個頂點 D 的坐標。＿＿＿＿＿

7. $ABCD$ 為四面體，已知 $\overline{AB}$ 垂直平面 BCD，又 $\overline{BD}\perp\overline{CD}$，$\overline{CD}=3$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AB}=12$，則 $\overline{AD}$ 長為＿＿＿＿。

8. 如圖，一正立方體，被一平面截出一個四邊形 $ABCD$，其中 A 在 $\overline{EF}$ 上，$\overline{EA}:\overline{AF}=1:2$，$D$ 在 $\overline{GH}$ 上，$\overline{GD}:\overline{DH}=2:1$，$B$ 為 $\overline{IJ}$ 中點，求 $\cos\angle DAB=$＿＿＿＿。



9. 在空間坐標中，設 xy 平面為一鏡面。有一光線通過點 $P(1,2,1)$，射向鏡面上的點 $O(0,0,0)$，經鏡面反射後通過點 R。若 $\overline{OR}=2\overline{PO}$，求 R 點坐標為＿＿＿＿＿。

10. 空間中三點 $A(3,-5,5)$、$B(1,-1,1)$、$C(3,-2,2)$，求 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 方向上的正射影為＿＿＿。

11. 承 10，B 點在 $\overline{AC}$ 上投影點的坐標為＿＿。

12. 若向量 $\overrightarrow{n}$ 同時與 $\overrightarrow{a}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{b}=(2,-1,0)$ 均垂直，且 $|\overrightarrow{n}|=6$，則 $\overrightarrow{n}=$＿＿＿＿。

13. 由三向量 $\overrightarrow{a}=(2,2,1)$，$\overrightarrow{b}=(2,-1,1)$，$\overrightarrow{c}=(1,3,1)$，所張開之平行六面體的體積為＿＿＿。

14. 已知 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 三空間向量所張平行六面體的體積為 5，則 $2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$，$4\overrightarrow{b}$，$5\overrightarrow{c}$ 三空間向量所張平行六面體的體積＝＿＿＿。

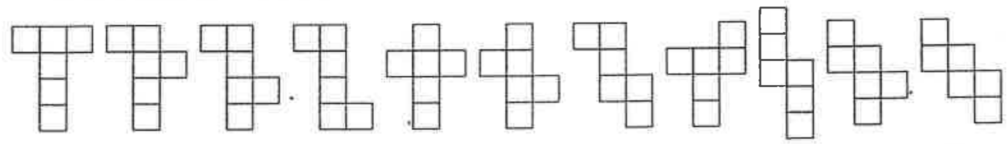
15. 若 $\overrightarrow{a}=(-2,1,1)$ 與 $\overrightarrow{b}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{c}=(k,-1,2)$ 共平面，則 k 的值為＿＿＿。

16. 已知 x，y，$z\in\boldsymbol{R}$，且 $x^2+y^2+z^2=24$，試求 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 之最大值為＿＿＿＿。

第四部分：混合題或非選擇題（佔 10 分，此部分請寫出詳細計算過程）

說明:本部分共有 1 題組，每一組題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與非選擇題作圖部分使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。非選擇提請由左而右橫式書寫試，作答時需寫出計過程或理由，否則將酌予扣分。

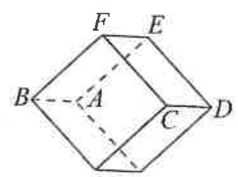
1. 立方體有 11 種不同的展開圖，換言之，有 11 種不同的方法切開空心立方體的 7 條棱而將其展平為平面圖形，如下圖。



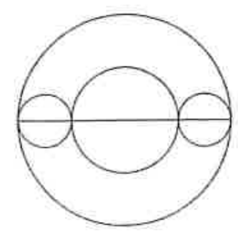
右圖，是空間中的一個正立方體，若 $A(\sqrt{2},2,0)$，$B(-\sqrt{2},2,0)$，$C(-\sqrt{2},-2,0)$，試求：

(1) D 點坐標為＿＿＿＿＿。(3%)

(2) 若 $\overline{EF}$ 之中點於正 z 軸上，則頂點 F 的坐標為＿＿＿＿＿。(3%)



2. 一直徑為 48 公尺的圓形草坪，欲將直徑分成三段，並建造分別以此三段為直徑的圓形花圃，如圖所示，則這三個圓形花圃應如何建造，才能使三個圓形花圃的面積和為最小？(5%)



高雄市正義中學高中部 111 學年度第二學期第一次期中考數學科答案卷

【高二自然組】 **命題教師：吳孟珍**

高二年______班　　座號：______　　姓名：__________________

第一部分：單一選擇題 20%　(每題 4 分)

1	2	3	4	5
4	5	4	4	2

第二部分：多重選擇題 25%　(每答對一選項得 1 分，答錯不倒扣)

1	2	3	4	5
14	35	135	15	235

第三部分：填充題 45%　(配分如下量尺)

1	$(1,3,1)$	2	$5\sqrt{3}$	3	$\frac{31}{3}$	4	$\frac{5}{3}$
5	54	6	$(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$	7	$4\sqrt{10}$	8	$\frac{1}{\sqrt{370}}$
9	$(-2,-4,2)$	10	$(0,4,-4)$	11	$(3,-1,1)$	12	$(2,4,-4)$或$(-2,-4,4)$
13	3	14	200	15	2	16	48

答對題數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
得分	6	12	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	45

第四部分：混合題或非選擇題 (佔 10 分，此部分請寫出詳細計算過程)

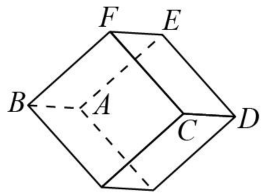
說明:本部分共有 1 題組，每一組題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。

非選擇提請由左而右橫式書寫，作答時需寫出計過程或理由，否則將酌予扣分。

1. 右圖是空間中的一個正立方體，若 $A(\sqrt{2},2,0)$，$B(-\sqrt{2},2,0)$，$C(-\sqrt{2},-2,0)$，試求：

(1) D 點坐標為 $\underline{(\sqrt{2},-2,0)}$。(3%)

(2) 若 $\overline{EF}$ 之中點於正 z 軸上，則頂點 F 的坐標為 $\underline{(-\sqrt{2},0,2)}$。(3%)



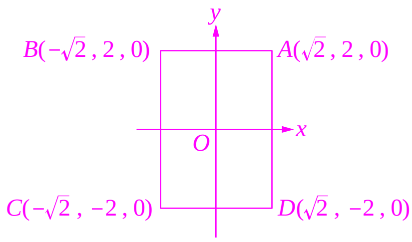
如右圖，$\overline{AB}=2\sqrt{2}$，$\overline{BC}=4 \Rightarrow \overline{AB}$ 為邊長，$\overline{BC}$ 為對角線。

(1) A,B,C,D 四點共平面

$\because$ $\overline{AC}$ 之中點 $=$ $\overline{BD}$ 之中點

$\therefore$ D 點坐標為 $(\sqrt{2},2,0)+(-\sqrt{2},-2,0)-(-\sqrt{2},2,0)=(\sqrt{2},-2,0)$，

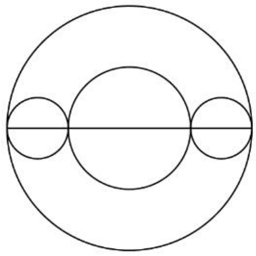
發現 A,B,C,D 都在 xy 平面上，如右圖



(2) 頂點 F 在 $\overline{BC}$ 之中點的上方，且與 x 軸距離為 $\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 4=2$

$\therefore$ 頂點 F 的坐標為 $(-\sqrt{2},0,2)$

2.一直徑為 48 公尺的圓形草坪，欲將直徑分成三段，並建造分別以此三段為直徑的圓形花圃，如圖所示，則這三個圓形花圃應如何建造，才能使三個圓形花圃的面積和為最小？(5%)



如右圖，設三圓形花圃的半徑分別為 x,y,z，

則 $2x+2y+2z=48 \Rightarrow x+y+z=24$，

且三個圓形花圃的面積和為 $\pi(x^2+y^2+z^2)$。

由柯西不等式，得

$(x^2+y^2+z^2)(1^2+1^2+1^2)\geq(x+y+z)^2$

$\Rightarrow (x^2+y^2+z^2)\cdot 3\geq 24^2$

$\Rightarrow (x^2+y^2+z^2)\geq\frac{24^2}{3}=192$

$\therefore$ 三個圓形花圃的最小面積和為 192π 平方公尺

此時 $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1} \Rightarrow$ 令 $x=t$，$y=t$，$z=t$，t 為實數，

代入 $x+y+z=24$，

得 $t+t+t=24 \Rightarrow t=8 \Rightarrow x=8$，$y=8$，$z=8$，

即三個圓形花圃的半徑均為 8 公尺，如右圖。