

高雄市正義中學高中部 111 學年度第二學期期末考數學科試題卷

【高一】

命題教師：余慕貞

第一部分：單一選擇題 (每題 3 分，共 15 分)

1. 設甲、乙、丙、丁四人互相投票給他人的機率各為 $\frac{1}{3}$ ，本人不可投票給自己。

甲得最高票的機率為？

- (A) $\frac{11}{27}$ (B) $\frac{10}{27}$ (C) $\frac{5}{27}$ (D) $\frac{4}{27}$ (E) $\frac{1}{9}$

2. $\triangle ABC$ 中，若 $\sin A + \sin C - 2 \sin B = 0$ ， $2 \sin A + 3 \sin B - 3 \sin C = 0$ ，則 $\triangle ABC$ 中最大角為？

- (A) 60° (B) 30° (C) 45° (D) 120° (E) 150°

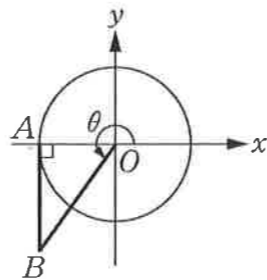
3. 箱中有三顆紅球與三顆白球。一摸彩遊戲是從箱中隨機同時抽出兩顆球。如果抽出的兩球顏色不同，則得獎金 100 元；如果兩球顏色相同，則無獎金。請問此遊戲獎金的期望值為何？

- (A) 20 元 (B) 30 元 (C) 40 元 (D) 50 元 (E) 60 元

4. 如右圖， A 為單位圓與 x 軸負向的交點，

$\overline{AB} \perp x$ 軸與角 θ 終邊交點為 B ，則 $\overline{AB} = ?$

- (A) $\sin \theta$ (B) $\cos \theta$ (C) $\tan \theta$ (D) $-\sin \theta$ (E) $-\cos \theta$



5. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{AC} = 7$ ， $\overline{BC} = 8$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為？

- (A) $8\sqrt{3}$ (B) $5\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) $10\sqrt{3}$ (E) $9\sqrt{3}$

第二部分：多重選擇題 (每題 5 分，共 25 分)

1. 甲乙二人作棋賽，約定先勝 3 局者可得彩金 8000 元，若甲乙兩人棋力相當 (即每局甲乙獲勝機率相等)，已知棋賽第一局甲獲勝，試問下列敘述，何者為真？

(A) 甲再勝第 2、3 局的機率為 $\frac{1}{4}$

(B) 甲先勝 3 局的機率為 $\frac{9}{16}$

(C) 乙先勝 3 局的機率為 $\frac{5}{16}$

(D) 若甲勝第一局後，棋賽因故中止，則甲應分得彩金 5500 元才合理

(E) 若甲勝第一局後，棋賽因故中止，則乙應分得彩金 2500 元才合理

2. 在二位數中任取一數，則下列何者為真？

(A) 奇數之機率為 $\frac{1}{2}$

(B) 個位數字比十位數字大之機率為 $\frac{2}{5}$

(C) 個位數字等於十位數字之機率為 $\frac{1}{9}$

(D) 數字不含 0 之機率為 $\frac{9}{10}$

(E) 6 的倍數之機率為 $\frac{1}{6}$

3. $[r, \theta]$ 為極坐標的表示法，若不限制 $r \geq 0$ ， $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ，則下列哪幾點和 $[2, 60^\circ]$ 表示同一個點？

- (A) $[4, 30^\circ]$ (B) $[2, -60^\circ]$ (C) $[2, -300^\circ]$ (D) $[2, 780^\circ]$ (E) $[2, 240^\circ]$

4. 設 $\triangle ABC$ 為直角三角形， $BCDE$ 是以 \overline{BC} 為一邊向外作出的正方形，若 $\overline{BC}=5$ ， $\overline{AB}=3$ ， $\overline{AC}=4$ ，設 $\angle ACD=\theta$ ，則下列何者正確？

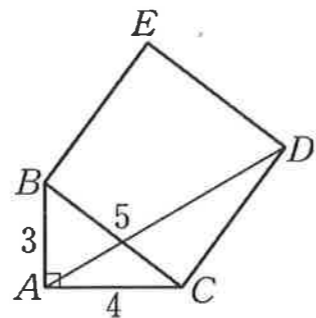
(A) $\cos\theta = -\frac{4}{5}$

(B) $\cos\theta = \frac{3}{5}$

(C) $\overline{AD} = \sqrt{65}$

(D) $\triangle ACD$ 面積為6

(E) $\triangle ACD$ 面積為8 (平方單位)



5. 在(凸)四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AB}=3$ ， $\overline{BC}=4$ ， $\overline{CD}=3$ ， $\overline{DA}=x$ ，

且對角線 $\overline{AC}=4$ 。請選出正確的選項：

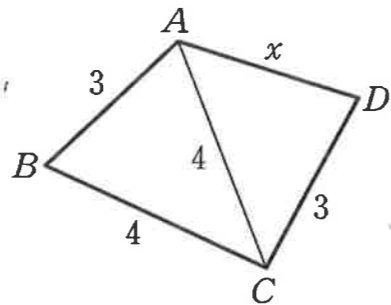
(A) $\cos\angle ABC \geq \frac{3}{7}$

(B) $\cos\angle BAD > \cos\angle ABC$

(C) x 可能為1

(D) $x < \frac{13}{2}$

(E) 若 A, B, C, D 四點共圓，則 $x = \frac{7}{4}$



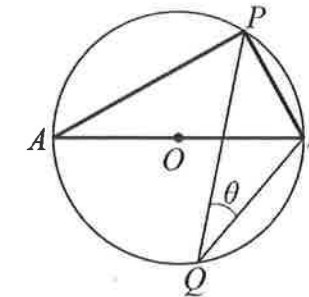
3. $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 4$ ，則：

(1) $\overline{BC} : \overline{CA} : \overline{AB} = ?$ (2) $\cos A = ?$

4. 如右圖， \overline{AB} 為圓 O 之直徑，若 $\overline{AB}=5$ ， $\cos\theta = \frac{4}{5}$ ，則

(1) $\overline{PA} = ?$

(2) $\overline{PB} = ?$



5. 設 θ 為銳角，且 $\tan\theta = \frac{3}{2}$ ，則 $\frac{2\sin\theta + 3\cos\theta}{4\sin\theta - 3\cos\theta}$ 的值為？

6. 若 $\sin\theta > 0$ 且 $\cos\theta < 0$ ，則 θ 為第幾象限角？

7. $a = \sin 150^\circ$ ， $b = \cos(-70^\circ)$ ， $c = \tan 106^\circ$ ， $d = \cos 211^\circ$ ，則 a, b, c, d 的大小為？

8. 試求 $\Gamma : \begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases}$ ， $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ，所表示圖形的長度為？

9. 在極坐標平面上，有兩點 $A[2, 30^\circ]$ 及 $B[3, 240^\circ]$ ， O 為原點，求 $\triangle OAB$ 的面積為？

10. 設 $\sin\theta = \frac{5}{13}$ ，且 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，則 $\sin(180^\circ - \theta) + \cos(180^\circ - \theta)$ 之值為？

第三部分：填充題 (共 50 分)

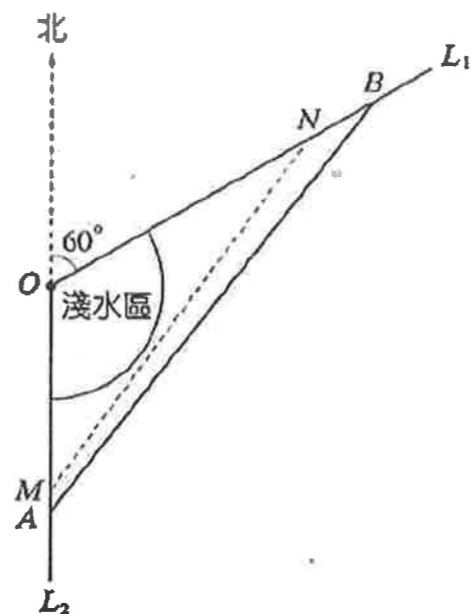
1. 已知點 $P(5, k)$ 為標準位置角 θ 終邊上一點，若 $\tan\theta = -\frac{12}{5}$ ，則：

(1) $\sin\theta = ?$ (2) $\cos\theta = ?$

2. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=6$ ， $\overline{AC}=4$ ， $\angle A=120^\circ$ ，若 D 在 \overline{BC} 上且 \overline{AD} 平分 $\angle BAC$ ，則 \overline{AD} 之長為？

第四部分：素養題 (共 10 分)

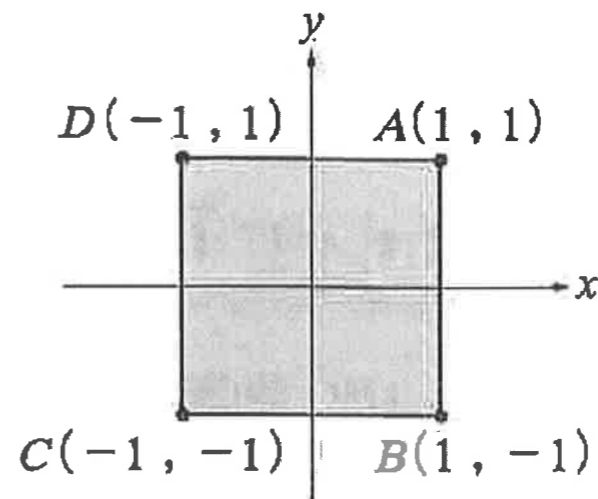
1. 高雄市港灣的部分平面示意圖如右圖所示，
 點 O 、 A 、 B 分別是海岸線 L_1 、 L_2 上的三個建築物，
 A 位於 O 的正南方向6公里處，
 B 位於 O 的北偏東 60° 方向10公里處。



(1) 請問 A 、 B 兩建築物之間的距離為何？(3分)

(2) 隨著觀光推動的發展，為緩解 O 附近的交通壓力，擬計畫在海岸線 L_1 、 L_2 上分別修建碼頭 N 、 M 開闢水上航線。經勘測後發現，以 O 為圓心，3公里為半徑的扇形區域為淺水區，並不適宜船隻的航行。若 N 、 M 之間的直線航程最短，試求此最短航程距離為多少公里？(4分)

2. 高機電科技大廠預計在112年終尾牙餐會時，舉辦加碼抽年終獎金的活動，規則如下：抽獎者丟擲一次公正的骰子(點數1~6)，按照骰子擲出的數字讓動點 P 在平面座標上移動。假設 P 從原點出發 (1)若骰子出現的數字為偶數，則動點 P 向右移動一個單位，如為奇數則向左移動一個單位；(2)若骰子出現的數字為質數，則動點 P 向上移動一個單位，如為非質數則向下移動一個單位。



當點 P 移動到 $A(1, 1)$ 時，可獲得加碼的年終獎金9000元、
 當點 P 移動到 $B(1, -1)$ 時，可獲得加碼的年終獎金6000元、
 當點 P 移動到 $C(-1, -1)$ 時，可獲得加碼的年終獎金3000元、
 當點 P 移動到 $D(-1, 1)$ 時，可獲得加碼的年終獎金0元。

請問此公司員工參與遊戲活動一次可獲得額外加碼年終獎金的期望值為何？
 (3分)

高雄市正義中學高中部 111 學年度第二學期期末考數學科答案卷

【高一】 命題教師：余慕貞

高一年__班 座號：____ 姓名：_____

第一部分：單一選擇題 15% (每題 3 分)

1	2	3	4	5
C	E	D	C	D

第二部分：多重選擇題 25% (每答對一選項得 1 分，答錯不倒扣)

1	2	3	4	5
ACDE	ABDE	CD	CE	DE

第三部分：填充題 50%

1-(1)	$-\frac{12}{13}$	1-(2)	$\frac{5}{13}$
2	$\frac{12}{5}$	3-(1)	7 : 5 : 4
3-(2)	$-\frac{1}{5}$	4-(1)	4
4-(2)	3	5	2
6	=	7	$a > b > d > c$
8	3π	9	$\frac{3}{2}$
10	$-\frac{7}{13}$		

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
得分數	10	20	24	30	32	34	36	38	40	42	44	46	50

第四部分：素養題 10% (此部分請寫出詳細計算過程)

1.(1) 3 分

在 $\triangle ABO$ 中， $OA = 6$ ， $OB = 10$ ， $\angle AOB = 120^\circ$

根據餘弦定理得

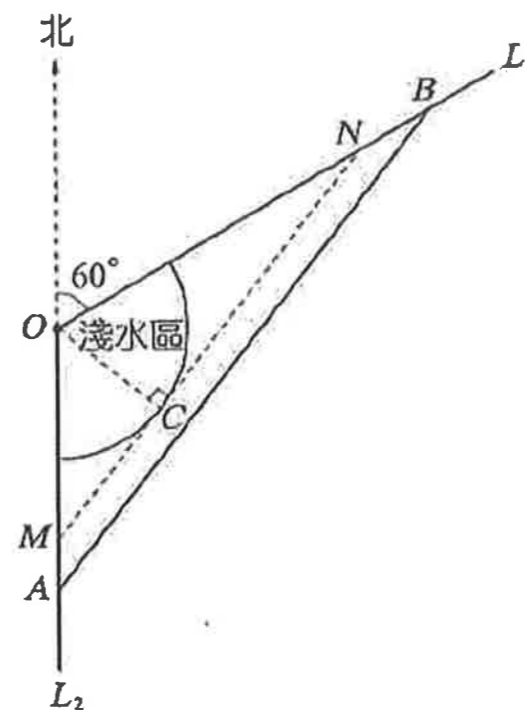
$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2 \times \overline{OA} \times \overline{OB} \times \cos 120^\circ \\ &= 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 196 \end{aligned}$$

所以 $\overline{AB} = 14$ ，故 A, B 兩鄉鎮之間的距離為 14 公里

1.(2) 4 分

依題意知，直線 MN 必與圓 O 相切

令切點為 C ，連接 \overline{OC} ，則 $\overline{OC} \perp \overline{MN}$



設 $\overline{OM} = x$ ， $\overline{ON} = y$ ， $\overline{MN} = c$

在 $\triangle OMN$ 中，

$$\text{由 } \frac{1}{2} \times \overline{MN} \times \overline{OC} = \frac{1}{2} \times \overline{OM} \times \overline{ON} \times \sin 120^\circ$$

$$\text{得 } \frac{1}{2} \times 3c = \frac{1}{2} xy \sin 120^\circ, \text{ 即 } xy = 2\sqrt{3}c$$

由餘弦定理得

$$c^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ = x^2 + y^2 + xy$$

由算幾不等式知 $\frac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2} \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2xy$

所以 $c^2 = x^2 + y^2 + xy \geq 3xy = 6\sqrt{3}c$ ，解得 $c \geq 6\sqrt{3}$

當 $x=y=6$ 時，算幾不等式等號成立，則 $c = MN$ 有
最小值 $6\sqrt{3}$

所以當碼頭 M 、 N 與鄉鎮 O 的距離均為 6 公里時，

M 、 N 之間的直線航程最短，最短航程距離為 $6\sqrt{3}$ 公里。

2.3 分

根據題意，列表如下：

骰子擲出的點數	x 坐標	y 坐標	移動至
1	-1	-1	C 點
2	1	1	A 點
3	-1	1	D 點
4	1	-1	B 點
5	-1	1	D 點
6	1	-1	B 點

故 $P(\text{移至 } A \text{ 點}) = \frac{1}{6}$ ； $P(\text{移至 } B \text{ 點}) = \frac{2}{6}$ ；

$P(\text{移至 } C \text{ 點}) = \frac{1}{6}$ ； $P(\text{移至 } D \text{ 點}) = \frac{2}{6}$

因此期望值 $= \frac{1}{6} \times 9000 + \frac{2}{6} \times 6000 + \frac{1}{6} \times 3000 + \frac{2}{6} \times 0$
 $= 4000$ 元。