高雄市正義中學高中部111學年度第二學期 期末考 高二數學試題

【高二自然組】 **命題教師：吳孟珍**

第一部分：單一選擇題 (每題4分，共20分)

1. 兩矩陣A與B，$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&2\\4&1\end{bmatrix}$，若$A+2B=\begin{bmatrix}x&y\\z&u\end{bmatrix}$，則2x＋u－y之值為

   (1)14 (2)11 (3)8 (4)6 (5)0

2. 下列各敘述何者正確？

   (1)$\begin{bmatrix}2a&b\\2c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&2b\\c&2d\end{bmatrix}$ (2)$(-1)\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-3\\-2&-4\end{bmatrix}$

   (3)$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ (4)$\begin{bmatrix}a&d\\b&e\\c&f\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x&z\\y&k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+x&d+z\\b+y&e+k\\c+0&f+0\end{bmatrix}$

   (5)$A=\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}\Rightarrow A+(-A)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

3. 若$\begin{bmatrix}7&6\\5&4\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$，則$a+b+c+d$的值

   (1)11 (2)12 (3)13 (4)14 (5)15

4. 下列線性變換，何者"面積漲縮率"小於1？

   (1)$\begin{bmatrix}5&4\\3&2\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}\frac{3}{4}&0\\0&\frac{3}{4}\end{bmatrix}$ (3)$\begin{bmatrix}1&r\\0&1\end{bmatrix}$ (4)$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (5)$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$

5. 設一個二階方陣A所作的平面變換是：先逆時針旋轉45°，再對直線$x-y=0$作鏡射，最後再沿x,y軸方向各伸縮$\sqrt{2}$倍，則A為下列哪一選項？

   (1)$\begin{bmatrix}-1&1\\1&1\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$ (3)$\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$ (4)$\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$ (5)$\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix}$

第二部分：多重選擇題 (每題5分，共20分)

1. 設 A、B、C 均為二階方陣， I 為二階單位方陣， O 為二階零矩陣，det(A)表矩陣 A 的行列式值，試選出正確的選項。

   (1) A(B+C)=AB+CA
   (2) AI=IA 必不成立
   (3) (AB)C=A(BC)
   (4) 若 det(A)≠0，且 AB＝AC ，則 B＝C
   (5) 若 AB＝O，則 A＝O 或 B＝O

2. 設A, B都是3×2階矩陣，且$A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]$，已知$a_{ij}=i+j$，$b_{ij}=3i-2j$，令$X=A+B=[x_{ij}]$，則

   (1) $x_{11}=5$
   (2) $x_{12}=2$
   (3) $x_{21}=2$
   (4) $x_{31}=11$
   (5) $x_{32}=7$

3. 設A表平面上的線性變換，B表平面上的伸縮變換，E表平面上的推移變換，D表平面上的旋轉變換，F表平面上的鏡射變換，下列敘述哪些是正確的？

   (1)直線經A之變換後仍為直線
   (2)銳角三角形經B之變換後為鈍角三角形
   (3)拋物線經D之變換後仍為拋物線
   (4)正方形經E之變換後周長不會改變
   (5)任一點經F變換二次後之像點為本身

4. 坐標平面上一矩形，其頂點分別為$A(3,-2)$、$B(3,2)$、$C(-3,2)$、$D(-3,-2)$。設二階方陣M為在坐標平面上定義的線性變換，可將A映射到B且將B映射到C。請選出正確的選項。

   (1) M定義的線性變換是鏡射變換
   (2) $M\begin{bmatrix}3&3\\-2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-3\\2&2\end{bmatrix}$
   (3) M定義的線性變換將C映射到D且將D映射到A
   (4) M的行列式值為-1
   (5) $M^3=-M$

第三部分：填充題（共 50 分）

1. 已知矩陣 A=$\begin{bmatrix} -5-a & -2 \\ 3 & -a \end{bmatrix}$ 的反方陣不存在，則實數 a=______。

2. 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，

若 $3X-2A+3B=2X-5C$，則 X=______。

3. 籃球比賽中，志傑總共投進了 17 球，共得到 32 分，其中罰球及三分球加起來比二分球多進 3 個。若他共投進 x 個罰球，y 個兩分球，z 個 3 分球，求數對 (x,y,z)=________。

4. 將方程組 $\begin{cases} x+ay+3z=5 \\ bx+y-3z=-3 \\ 3x-y+2z=c \end{cases}$ 的增廣矩陣，利用高斯消去法化簡到 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，

計算過程均無錯誤，試求序組 $(a,b,c)=$______。

5. 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$，若 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 成立，則 $x=$______。

6. 若密碼 $abcd$ 符合二階方陣的等式：$\begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -10 & 35 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$，

則密碼 $abcd$ =______。

7. 設 A 與 B 均為可逆方陣，且 $A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，$B^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$，則 $(AB)^{-1}=$______。

8. 有一線性變換矩陣為 $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$，今將 A、B、C 三點變換得 A'、B'、C'，

若 $\triangle ABC$ 面積為 5，求 $\triangle A'B'C'$ 面積=_______。

9. 設圓 $C:x^2+y^2=9$，以原點 O 為中心伸縮 5 倍得圓 C'，則圓 C' 的方程式為______。

10. 令 $\begin{bmatrix} \sin 60° & -\cos 60° \\ \cos 60° & \sin 60° \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 之最小自然數 $n=$______。

11. 設 $L:y=2x$，求點 $P(5,0)$ 對直線 L 之對稱點 P'' 的坐標為______。

12. 設直線 L 在二階方陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的推移變換下，得另一直線 L'，

若 L' 的方程式是 $2x-3y=4$，則 L 的方程式是______。

13. 英姐口袋裡有 1 個白球，1 個紅球；阿珍口袋裡有 3 個白球。現在兩人每次自口袋中隨機取一個球與對方交換。經過長期交換後，有 2 個白球在英姐口袋裡的機率為__________。

第四部分：混合題 10%

1. 微中子為宇宙中的基本粒子之一，我們很難以發覺它的存在。

在2015年諾貝爾物理學獎中發現，微中子會在不同型態之間轉換，稱為微中子震盪。假設目前只有兩種不同型態的粒子 A 與 B，且其粒子會隨時間而改變，若在時間為 n（秒）時，粒子 A 的數量為 a_n，粒子 B 的數量為 b_n，且滿足

$a_{n+1}=3(a_n+b_n)$，$b_{n+1}=2bn$（其中 n=0, 1, 2, ...），

若二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 滿足 $\begin{bmatrix} a_6 \\ b_6 \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$，則 a+b+c+d 為下列哪一個選項？

(A)16 (B)81 (C)195 (D)292 (E)308

2. 試將 $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ 表成基本線性變換的合成?並說明線性變換的順序。

高雄市正義中學高中部 111 學年度第二學期 期末考 數學科答案卷

【高二自然組】　　　　命題教師：吳孟珍

二年_____班　座號：_____姓名：____________

第一部分：單一選擇題　20%（每題 4 分）

1	2	3	4	5
1	2	3	2	4

第二部分：多重選擇題　20%（每答對一選項得 1 分，答錯不倒扣）

1	2	3	4
34	24	135	235

第三部分：填充題 50%

1	-2 or -3	2	$\begin{bmatrix}-16 & -20 & 41\\ -21 & -12 & -8\end{bmatrix}$
3	(6 , 7 , 4)	4	(−2 , 2 , 6)
5	6	6	7321
7	$\begin{bmatrix}12 & 1\\ 14 & -3\end{bmatrix}$	8	10
9	$x^2+y^2=225$	10	12
11	$(-3,4)$	12	$4x+3y+4=0$
13	$\frac{3}{5}$		

答對題數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
得分數	6	12	18	23	27	31	35	39	42	45	47	49	50

第四部分：混合題(共 10 分，此部分請寫出詳細計算過程)

1. 微中子為宇宙中的基本粒子之一，我們很難以發覺它的存在。在 2015 年諾貝爾物理學獎中發現，微中子會在不同型態之間轉換，稱為微中子震盪。假設目前只有兩種不同型態的粒子 A 與 B，且其粒子會隨時間而改變，若在時間為 n（秒）時，粒子 A 的數量為 a_n，粒子 B 的數量為 b_n，且滿足 $a_{n+1}=3(a_n+b_n)$，
$b_{n+1}=2bn$（其中 n=0，1，2，...），
若二階方陣 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$滿足$\begin{bmatrix}a_6\\ b_6\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a_2\\ b_2\end{bmatrix}$，則 a+b+c+d 為下列哪一個選項？
(A)16　(B)81　(C)195　(D)292　(E)308

D

由題可得$\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}$，

故 $A=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}^4=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}3 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}9 & 15\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 15\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}81 & 195\\ 0 & 16\end{bmatrix}$，

所以 $a+b+c+d=292$，

2. 試將$\begin{bmatrix}-4 & -2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$表成基本線性變換的合成?並說明線性變換的順序。

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & -2\\ -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-4 & -2\\ -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

轉 180 度，對 y=x 作鏡射，推移 y 座標的 2 倍，再伸縮 2 倍