高雄市正義中學高中部 112 學年度第一學期 第一次期中考數學科試題

【高二】自然組

出題老師：梁瑞龍、余慕貞

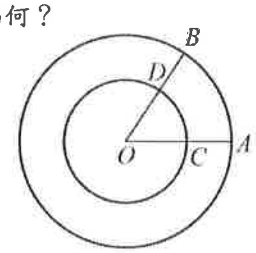
第一部分：單一選擇題 (每題 3 分，共 15 分)

1. 若 $a=\sin 2$，則下列何者正確？

(A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{1}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}\le a<1$

2. 如右圖，兩個同心圓的半徑分別是 3 和 5，且 $\overset{\frown}{AB}$ 的長度為 5，求藍色部分的面積為何？

(A)8 (B)16 (C)4π (D)8π (E) $\frac{20}{3}$



3. 當 x 介於 0 與 $\frac{3}{2}\pi$ 之間，直線 $y=1-x$ 與函數 $y=\tan x$ 的圖形，共有幾個交點？

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3 (E)4

4. 下列各選項中，哪一個值最大？

(A) $\sin 20^\circ \cos 20^\circ$ (B) $\sin 40^\circ \cos 40^\circ$ (C) $\sin 80^\circ \cos 80^\circ$ (D) $\cos^2 20^\circ-\frac{1}{2}$ (E) $\frac{1}{2}-\sin^2 10^\circ$

5. 求 $\sin(26^\circ-\theta)\cos(34^\circ+\theta)+\cos(26^\circ-\theta)\sin(34^\circ+\theta)$ 之值？

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E)受 θ 影響

第二部分：多重選擇題 (每題 5 分，共 25 分)

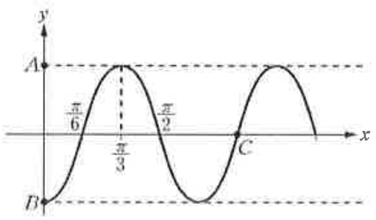
1. θ=100 弧度，其最小正同界角為 α，最大負同界角為 β，則下列何者正確？

(A)θ 在第四象限內 (B)θ 在第三象限內 (C) $\alpha=100-30\pi$ (D) $\beta=100-32\pi$ (E) $\alpha-\beta=2\pi$

2. 右圖為三角函數 $y=3\sin(ax-b)$ 的部分圖形，其中 $a>0$，則下列各項敘述何者正確？

(A) $B(0,-3)$ (B) $b=\frac{\pi}{6}$ (C) $C(\frac{5\pi}{6},0)$ (D) y 的週期為 $\frac{2\pi}{3}$

(E)其圖形可由 $y=3\sin 3x$ 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 而得



3. 下列哪些函數的週期相同？

(A) $y=-2+\cos 2x$ (B) $y=\cos\frac{3\pi}{4}+2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ (C) $y=\tan x$

(D) $y=-3\sin(-2x)$ (E) $y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$

4. 已知 $\tan\theta=-\frac{3}{4}$ 且 $90^\circ<\theta<180^\circ$，則下列何者正確？

(A) $\tan 2\theta=\frac{24}{7}$ (B) $\sin 2\theta=-\frac{24}{25}$ (C) $\cos 2\theta=\frac{7}{25}$ (D) $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$ (E) $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

5. 關於 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的圖形，下列敘述何者正確？

(A) $f(x)$ 的週期 2π (B) $f(x)$ 的振幅為 2 (C) $y=f(x)$ 的圖形與 y 軸交點為 $(0,-\sqrt{3})$

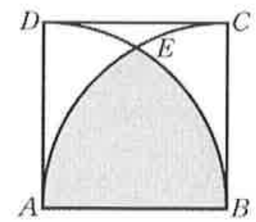
(D) $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸有無限多個交點 (E) $y=f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x-\frac{\pi}{2}=0$

第三部分：填充題 (50 分)

1. 已知 $0<x<\pi$，試求不等式 $-\frac{1}{2}\le\cos x\le\frac{1}{2}$ 的解為__(1)__。

2. 設 $-2\pi\le x\le 2\pi$，試求 $\cos x+|\cos x|=\frac{3}{2}$，有__(2)__個實數解。

3. 如右圖，正方形 ABCD 邊長 1，以 A，B 為圓心，1 為半徑，在正方形內作圓弧，則灰色部分之面積為__(3)__。



4. 設 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 為 $x^2-4x-1=0$ 之兩根，求下列各式的值：

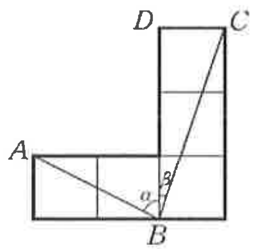
(1) $\tan(\alpha+\beta)$__(4-1)__。 (2) $\cos^2(\alpha+\beta)$__(4-2)__。

5. 設α、β分別為第一、四象限角，且$\cos\alpha=\frac{5}{13}$，$\sin\beta=-\frac{4}{5}$，則$\alpha-\beta$為第__(5)__象限角。

6. 求$\frac{\sin 24^\circ}{\sin 8^\circ}-\frac{\cos 24^\circ}{\cos 8^\circ}$之值為__(6)__。

7. 如右圖，每一個小方格均為正方形，設$\angle ABD=\alpha$，$\angle CBD=\beta$，

試求$\tan(\alpha+\beta)=$__(7)__。



8. 求$\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ$的值=__(8)__。

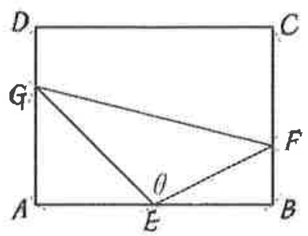
9. 設$0\le x\le 2\pi$，求函數$y=2\sin(x+\frac{\pi}{3})-2\sin x$之$y$的最大值為__(9-1)__，此時$x$的值為__(9-2)__。

10. 將$\sin x-2\cos x$化成$a\sin(x+\theta)$，其中$a>0$，則$\tan\theta=$__(10)__。

11. 設$-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{3}$，$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，則當$x=\alpha$時，$y$有最大值M，則序對$(\alpha, M)=$__(11)__。

12. 如右圖，在長方形$ABCD$中，$\overline{AB}:\overline{AD}=4:3$，$\overline{EA}:\overline{EB}=1:1$，

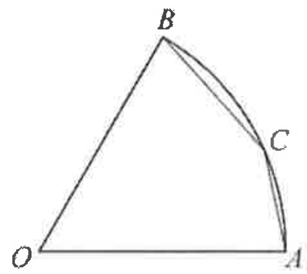
$\overline{FB}:\overline{FC}=1:2$，$\overline{GA}:\overline{GD}=2:1$，若$\angle GEF=\theta$，則$\sin\theta=$__(12)__。



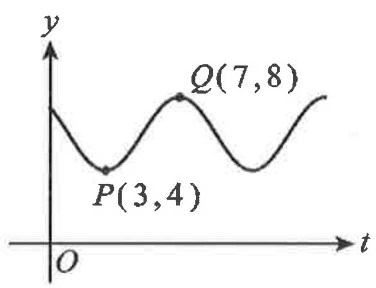
第四部分：素養題(10分，請寫出詳細計算過程)

1. 如下圖，已知扇形OAB的半徑為r（定值），圓心角$\angle AOB$為$\frac{\pi}{3}$，C為弧$\widehat{AB}$上一動點，

若四邊形$OACB$面積的最大值為3，則此扇形半徑r為？(5分)



2. 下圖為一週期波在某介質中前進時的振動高度y（公分）與其時間t（秒）的關係圖。
已知P(3,4)、Q(7,8)分別為此波的最低點與最高點。若$t\ge 0$時，此波可表示成$y=A\sin(\omega t+\phi)+B$，
其中A、B、ω、ϕ均為常數，且$A>0$，$\omega>0$，$0\le\phi<2r$，
試求出此波的週期、A、B、ω、ϕ的值。(各1分)



高雄市正義中學高中部 112 學年度第一學期　第一次期中考數學科試題

高二年 3 班　　座號：______姓名：______________

第一部分：單一選擇題　15%（每題 3 分）

1	2	3	4	5
(E)	(A)	(C)	(B)	(B)

第二部分：多重選擇題　25%（每答對一選項得 1 分，答錯不倒扣）

1	2	3	4	5
(A)(C)(D)(E)	(A)(C)(D)(E)	(A)(B)(C)(D)(E)	(B)(C)	(A)(B)(C)(D)

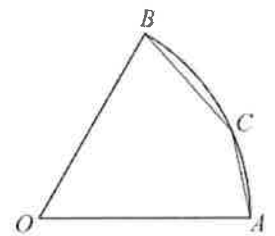
第三部分：填充題　50%

1	$\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$	2	4 個
3	$\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$	4-1	2
4-2	$\frac{1}{5}$	5	第二象限
6	2	7	7
8	$\frac{1}{8}$	9-1	2
9-2	$\frac{11}{6}\pi$	10	-2
11	$(\frac{\pi}{6}, 2)$	12	$\frac{3\sqrt{10}}{10}$

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
得分數	10	20	24	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	50

第四部分：素養題 10%（未列式或說明者，該題不予計分，每小題 5 分）

1. 如下圖，已知扇形 OAB 的半徑為 r（定值），圓心角$\angle AOB$ 為$\frac{\pi}{3}$，C 為弧$\overset{\frown}{AB}$上一動點，若四邊形 $OACB$ 面積的最大值為 3，則此扇形半徑 r 為？(5 分)



$r =$ $\sqrt{6}$ 。　設 $\angle AOC = \theta$，其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$，可知 $\angle BOC = \frac{\pi}{3} - \theta$

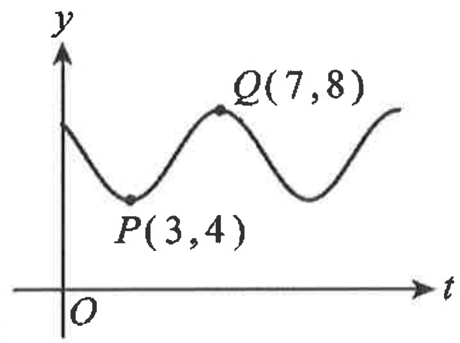
解 所以四邊形 $OACB$ 的面積 = ΔAOC 面積 + ΔBOC 面積

$$= \frac{1}{2} \times r^2 \times \sin\theta + \frac{1}{2} \times r^2 \times \sin(\frac{\pi}{3} - \theta) = \frac{r^2}{2}(\sin\theta + (\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta - \cos\frac{\pi}{3}\sin\theta))$$

$$= \frac{r^2}{2}(\sin\theta + (\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta)) = \frac{r^2}{2}(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta) = \frac{r^2}{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{3}) \le \frac{r^2}{2}\ (\because \frac{\pi}{3} < \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3})$$

因此可得 $\frac{r^2}{2} = 3 \Rightarrow r = \sqrt{6}$

2. 下圖為一週期波在某介質中前進時的振動高度 y（公分）與其時間 t（秒）的關係圖。已知 P(3 , 4)、Q (7 , 8) 分別為此波的最低點與最高點。若 $t \ge 0$ 時，此波可表示成$y = A\sin(\omega t + \phi) + B$，其中 A、B、ω、ϕ 均為常數，且 $A > 0$，$\omega > 0$，$0 \le \phi < 2r$，試求出此波的週期、A、B、ω、ϕ 的值。(各 1 分)



解 此波的週期 = 2 × (7 − 3) = 8 秒

解 承13.可知此波的週期為 $\frac{2\pi}{\omega} = 8 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$

因為此波的振幅 $= \frac{8-4}{2} = 2 = A$，所以 $y = 2\sin(\frac{\pi}{4}t + \phi) + B \le 2 + B = 8$

$\Rightarrow B = 6 \Rightarrow y = 2\sin(\frac{\pi}{4}t + \phi) + 6$，將 $P(3 , 4)$ 代入可得 $2\sin(\frac{3\pi}{4} + \phi) + 6 = 4$

$\Rightarrow \sin(\frac{3\pi}{4} + \phi) = -1 \Rightarrow \frac{3\pi}{4} + \phi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \phi = \frac{3\pi}{4}$，故 $A = 2$，$B = 6$，$\omega = \frac{\pi}{4}$，$\phi = \frac{3\pi}{4}$