高雄市正義中學高中部 112 學年度第一學期第二次期中考數學科試題

【高三不分組】 命題教師：吳孟珍

第一部分：單一選擇題 (每題 5 分，共 30 分)

1.已知多項式 $xf(x)$ 的圖形在 $x=2$ 附近的一次近似為 $y=3x-4$，則 $y=f(x)$ 圖形在 $x=2$ 附近的一次近似為何？
(1) $y=x-1$ (2) $y=x-2$ (3) $y=3x-2$ (4) $y=3x-5$ (5) $y=8x-12$

2.已知 $f(x)$ 為二次函數，若 $f(x)$ 有最小值且 $|f(1)|=|f(3)|=|f(5)|=|f(8)|=8$，則 $f(x-6)$ 有最小值為何？
(1) -16 (2) -14 (3) -12 (4) -10 (5) -8。

3. 若 n 為自然數，且 3^n 為 49 位數，符合上述條件的 n 值有兩個，則這兩個 n 值的總和為何？
(1)199 (2) 201 (3) 203 (4) 205 (5) 207 。

4.有白、紅、黃、藍四種顏色的粉筆供取用，其中黃色粉筆有 1 枝，藍色粉筆有 2 枝，其餘顏色的粉筆都至少有 4 枝。今從中任取 4 枝粉筆，其方法數為多少？
(1)16 種 (2) 21 種 (3) 24 種 (4)32 種 (5)35 種。

5.炎炎夏日，游泳戲水是許多人消暑解熱的最佳休閒活動。某游泳池統計最近一個月每天的最高溫 x(℃)與當日的泳客人數 y(人)的平均數分別為 $\mu_x=31$、$\mu_y=120$ 標準差分別為 $\sigma_x=2$、$\sigma_y=10$。已知由 y 對 x 的迴歸直線推測當某日的最高溫為 30°C 時，其當日的泳客人數為 116 人。試問 x 與 y 的相關係數為下列何者？
(1) 0.5 (2) 0.6 (3) 0.7 (4) 0.8 (5) 0.9

6.現有兩個糖果盒 A、B，當中各有 3 顆糖果。你以均等機會隨機選一個盒子並吃掉當中的一顆糖果，重複這個過程直到你吃掉其中一個盒子的最後一顆糖果為止。假設停止時另一個盒子裡恰有 X 顆糖果，則 X 的期望值為何？
(1) $\frac{3}{2}$ 顆 (2) $\frac{8}{5}$ 顆 (3) $\frac{5}{3}$ 顆 (4) $\frac{15}{8}$ 顆 (5) 2 顆。

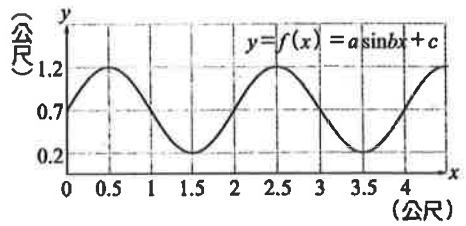
第二部分：多重選擇題 (每題 5 分，共 30 分)

7. 若 $a>0$ 且 $a\neq 1$，則下列敘述哪些是正確的？
(1) $y=\log_a x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 兩圖形對稱於 y 軸 (2) $y=a^x$ 與 $y=(\frac{1}{a})^x$ 兩圖形對稱於 x 軸
(3) $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 兩圖形對稱於直線 $y=x$ (4) $y=\log_a x$ 與 $y=\log_a(8x)$ 圖形相交於一點
(5)若 $y=a^x$ 的圖形和直線 $y=7x$ 交於相異兩點，則 $y=\log_a x$ 的圖形和直線 $y=\frac{1}{7}x$ 也交於相異兩點

8. 設 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 為平面上兩個不平行的非零向量，若 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}$，$t\in R$，則下列敘述哪些是正確的？
(1) $\overrightarrow{c}$ 可能垂直 $\overrightarrow{a}$ (2) $\overrightarrow{c}$ 可能平行 $\overrightarrow{a}$ (3) $\overrightarrow{c}$ 可能垂直 $\overrightarrow{b}$ (4) $\overrightarrow{c}$ 可能平行 $\overrightarrow{b}$
(5)當 $|\overrightarrow{c}|$ 有最小值時，$t\overrightarrow{b}$ 恰為 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之正射影

9. 規定行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的值為 $ad-bc$。若 a，b，c，d 是從 $1,2,3,\cdots,2022$ 這 2022 個整數中(可重複)選取。設行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的值是奇數的機率為 p，是偶數的機率為 q，則下列哪些選項是正確的？
(1) $p+q=1$ (2) $p=q$ (3) $p\leq\frac{1}{3}$ (4) $|p-q|\geq\frac{1}{4}$ (5) $|2p-q|<\frac{1}{8}$

10.健身房中有一種體能訓練叫作戰繩運動，用於增加核心穩定和提升運動爆發力，必須利用核心肌群去穩定身體甩動繩子，讓繩子呈現波的狀態，如圖所示，利用波的形狀去評估訓練者的練習狀況，若將此波形標示於坐標平面上，且此波形的函數為 $y=f(x)=a\sin bx+c$，其中 a,b,c 皆為正數， 則下列哪些選項是正確的？
(1) $y=f(x)$ 的振幅為 1 (2) $y=f(x)$ 的週期為 2 (3) $a=1$ (4) $b=\pi$ (5) $c=0.7$



11.設實數 a_1，a_2，a_3，…，a_6 是一個等差數列。若 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} a_1 & a_4 \\ a_2 & a_5 \\ a_3 & a_6 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，則下列哪些選項中的矩陣可能與 ABC 相等？
(1) $\begin{bmatrix} -9 \\ 9 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 9 & 9 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 3 & -3 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 18 & -18 \\ -18 & 18 \end{bmatrix}$

12.如圖(一)，用三個邊長為 1 且有三邊重疊的正六邊形來組成一個凹多邊形，把這個凹多邊形當作基本元件，將它適當地平移到一些不同的位置，像玩拼圖那樣子互相拼接(沒有縫隙且不重疊)，就可以得到某些凹多邊形圖案，圖(二)為其中一個例子(此兩圖中的 O，P，Q ，R，A，B，C，D，E 皆為正六邊形的某些頂點)。請問下列哪些選項的敘述正確？

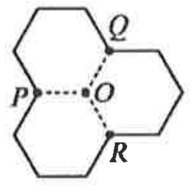
(1)$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{0}$

(2)$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OR}$

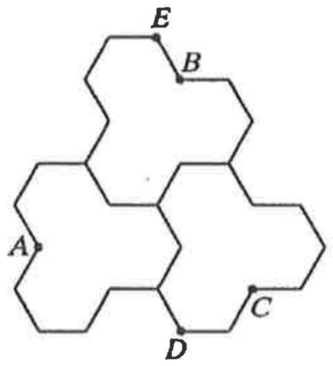
(3)$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=0$

(4)ΔABC 為正三角形

(5)可以把圖(一)的凹多邊形適當地平移到一些不同的位置而互相拼接(沒有縫隙且不重疊) 出一個凹 2023 邊形



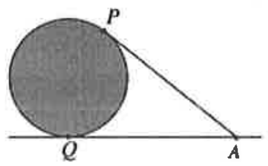
圖(一)



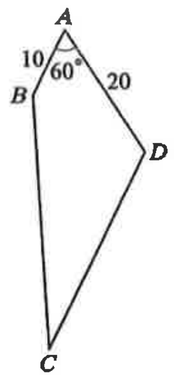
圖(二)

第三部分：填充題 (共30分)

13.在藝術文化祭中，有一巨型藝術氣球被固定在地面上的Q點， 並在氣球上一點P用一條繩子將其固定，而繩子的另一端則固定在地面上的A點。已知此氣球的側面圖為一圓Γ，如下圖：其中$\overline{AQ}$、$\overline{AP}$分別與圓Γ相切於Q、P兩點。若此條繩子的長度為 15 公尺(即$\overline{AP}=15$)，且P點離地高度為 9 公尺，則圓Γ的直徑長為_____公尺。



14. 如圖，有一個四邊形 $ABCD$ 的公園，若$\overline{AB}$=10 公尺，$\overline{AD}$= 20 公尺，$\angle BAD=60^\circ$，且$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，有一個阿伯在公園運動，想從 A 走直線到 C，則他所移動的距離$\overline{AC}$=______公尺。(化為最簡根式)



15. Thue-Morse 序列是一個由兩個符號組成的序列，通常以 0 和 1 表示。它的前幾項如下：$a_1=0$、$a_2=01$、$a_3=0110$、$a_4=01101001$、$a_5=0110100110010110$，數列的規則為將前一項的 0 用 01 取代，1 用 10 取代而得到下一項。按照這個規則，a_{100} 這一項的最後五個數字為_______ 。

16. 矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&r\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1\\r\end{bmatrix}$，若 $A^nB=\begin{bmatrix}1023\\1024\end{bmatrix}$，其中 n、r 皆為正整數，則數對(n , r)= _____。

17. 某班有 40 位同學，這 40 位同學全部都施打過一劑 COVID-19 疫苗，其中一些同學施打的是 BNT 疫苗，其餘的同學施打的是莫德納疫苗，沒有人兩劑都打。若隨機挑選 2 位同學，則這 2 位同學均是施打 BNT 疫苗的機率為$\frac{1}{10}$。今隨機挑選 3 位同學，則這 3 位同學中有人施打 BNT 疫苗，也有人施打莫德納疫苗的機率為_______ 。(化為最簡分數)

18.全台因為缺水問題需要停水，以下為 15 天內的停水計劃，如下表，月曆上 1 至 15 天，要規劃其中 3 天停水，為了民眾生活的便利性，停水的 3 天皆要不相鄰，且第 1 天，第 8 天，第 15 天也不能停水，例如：可停 2 ，4 ，6 或者 3，7 ，9...等等。試問有_____種停水方式。

月曆	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
停水	X							X							X

第四部分：混合題或非選擇題 (佔 10 分，此部分請寫出詳細計算過程)

說明:配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。

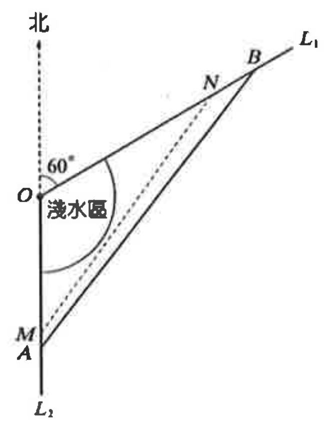
非選擇提請由左而右橫式書寫試，作答時需寫出計過程或理由，否則將酌予扣分。

19-20 題為題組

高雄市港灣的平面示意圖如右圖所示，點 O，A，B 分別是海岸線L_1，L_2上的三個鄉鎮，A 位於 O 的正南方向 6 公里處，B 位於 O 的北偏東 60°方向 10 公里處。

19. A，B 兩鄉鎮之間的距離為何？

20. 隨著經濟的發展，為緩解鄉鎮 O 的交通壓力，擬在海岸線L_1，L_2上分別修建碼頭 N、M，開闢水上航線。勘測時發現：以 O 為圓心，3 公里為半徑的扇形區域為淺水區，不適宜船隻航行。若 M，N 之間的直線航程最短，試求此最短航程距離為多少公里？



高雄市正義中學高中部 112 學年度第一學期第二次期中考數學科答案卷

【高三不分組】　　命題教師：吳孟珍

高三年______班　座號：______　姓名：__________________

第一部分：單一選擇題 30%　(每題 5 分)

1	2	3	4	5	6

第二部分：多重選擇題 30%　(每答對一選項得 1 分，答錯不倒扣)

7	8	9	10	11	12

第三部分：填充題 30%　(配分如下量尺)

13	14	15	16	17	18

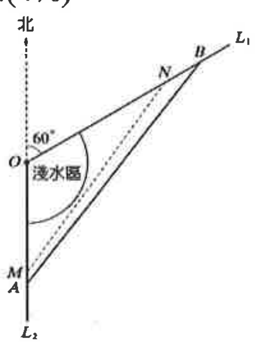
答對題數	1	2	3	4	5	6
得分	6	12	18	21	25	30

第四部分：混合題或非選擇題 (佔 10 分，此部分請寫出詳細計算過程)

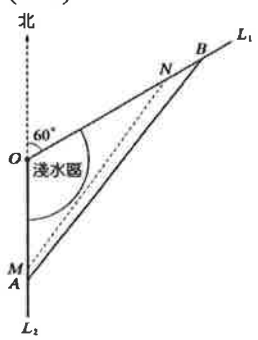
說明:本部分共有 1 題組，每一組題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。

非選擇提請由左而右橫式書寫，作答時需寫出計過程或理由，否則將酌予扣分。

19.(4%)



20.(6%)



高雄市正義中學高中部 112 學年度第一學期第二次期中考數學科答案卷

【高三不分組】　　命題教師：吳孟珍

高三年______班　座號：______　姓名：__________________

第一部分：單一選擇題 30%　(每題 5 分)

1	2	3	4	5	6
1	4	3	2	4	4

第二部分：多重選擇題 30%　(每答對一選項得 1 分，答錯不倒扣)

7	8	9	10	11	12
35	1235	14	245	34	134

第三部分：填充題 25%　(配分如下量尺)

13	14	15	16	17	18
10	$10\sqrt{19}$	01001	$(9,2)$	$\frac{27}{40}$	128

答對題數	1	2	3	4	5	6
得分	6	12	18	21	25	30

第四部分：混合題或非選擇題 (佔 10 分，此部分請寫出詳細計算過程)

說明:本部分共有 1 題組，每一組題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。

非選擇提請由左而右橫式書寫，作答時需寫出計過程或理由，否則將酌予扣分。

19.(4%)

在$\triangle ABO$中，$\overline{OA}=6$，$OB=10$，$\angle AOB=120^\circ$

根據餘弦定理得

$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\cos 120^\circ$

$=6^2+10^2-2\times6\times10\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

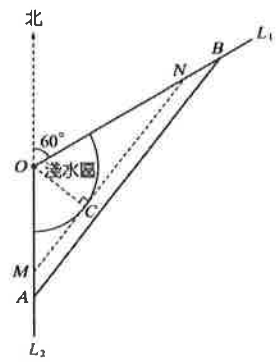
$=196$

所以$\overline{AB}=14$，故A，B兩鄉鎮之間的距離為 14 公里

20.(6%)

依題意知，直線 MN 必與圓 O 相切

令切點為 C，連接 $\overline{OC}$，則 $\overline{OC}\perp\overline{MN}$



設$\overline{OM}=x$，$\overline{ON}=y$，$\overline{MN}=c$

在$\triangle OMN$中，

由$\frac{1}{2}\times\overline{MN}\times\overline{OC}=\frac{1}{2}\times\overline{OM}\times\overline{ON}\times\sin 120^\circ$

得$\frac{1}{2}\times3c=\frac{1}{2}xy\sin 120^\circ$，即$xy=2\sqrt{3}c$

由餘弦定理得

$c^2=x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ=x^2+y^2+xy$

由算幾不等式知$\frac{x^2+y^2}{2}\geq\sqrt{x^2y^2}\Rightarrow x^2+y^2\geq 2xy$

所以$c^2=x^2+y^2+xy\geq 3xy=6\sqrt{3}c$，解得$c\geq 6\sqrt{3}$

當$x=y=6$時，算幾不等式等號成立，則$c=\overline{MN}$有最小值$6\sqrt{3}$

所以當碼頭M、N與鄉鎮O的距離均為 6 公里時，M，N之間的直線航程最短，最短航程距離為$6\sqrt{3}$公里。