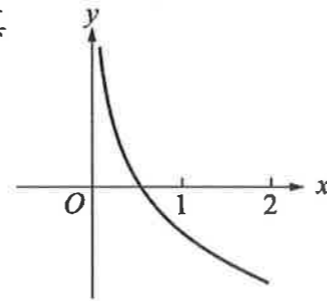


第一部分：單一選擇題(每題 3 分，共 15 分)

1. 右圖為函數  $y = a + \log_b x$  之部分圖形，其中  $a, b$  皆為常數，則下列何者為真

- (A)  $a < 0, b > 1$  (B)  $a > 0, b > 1$  (C)  $a > 0, 0 < b < 1$  (D)  $a < 0, 0 < b < 1$ 。



2. 設  $x$  為實數，方程式  $x - 1 = \log_2 x$  有幾個實根？

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。

3. 設  $0 < a < 1$ ，指數函數  $y = a^x$  之圖形與對數函數  $y = \log_a x$  之圖形對稱於下列哪一個？

- (A)  $x$  軸 (B)  $y$  軸 (C) 直線  $y = -x$  (D) 直線  $y = x$ 。

4. 設  $a > 1$ ，關於函數  $f(x) = a^x$ ，選出錯誤的選項：

- (A)  $f(x)$  的圖形在  $x$  軸的上方 (B)  $f(x) = a^x$  的圖形以  $x$  軸為漸近線  
(C)  $f(x)$  的圖形通過點  $(1, 0)$  (D)  $f(2) > 1$ 。

5. 設  $a > 1$ ，關於函數  $f(x) = \log_a x$ ，選出錯誤的選項：

- (A)  $a > 1 \Rightarrow f(a) < 0$  (B)  $f(x) = \log_a x$  的圖形以  $y$  軸為漸近線  
(C)  $f(x)$  的圖形通過點  $(1, 0)$  (D)  $f(x)$  的圖形在  $y$  軸的右方。

第二部分：多重選擇題(每題 5 分，共 25 分)

1. 判斷下列選項何者為真？

- (A)  $10^x = x$  有實數解 (B)  $10^x = x^2$  有實數解 (C)  $x$  為實數時， $10^x > x$  恆成立  
(D)  $x > 0$  時， $10^x > x^2$  恆成立 (E)  $10^x = -x$  有實數解。

2. 下列哪些函數的圖形與  $x - y = 0$  有交點？

- (A)  $y = 3^{x-2}$  (B)  $y = -3^x$  (C)  $y = 3^{-x}$  (D)  $y = 3^{|x|}$  (E)  $y = 3^x - 2$ 。

3. 設  $f(x) = \log_2 x$ ， $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ ，則下列何者為真？

- (A)  $f(x)$  的圖形恆在  $g(x)$  的圖形的下方 (B)  $g(x)$  的圖形恆在  $f(x)$  的圖形的下方  
(C)  $f(x)$  的圖形與  $g(x)$  的圖形對稱於  $x$  軸 (D)  $f(x)$  的圖形與  $g(x)$  的圖形恰交於一點  
(E)  $f(x)$  的圖形與  $g(x)$  的圖形均在  $y$  軸的右方。

4. 下列函數  $f(x)$ ，哪些選項是“指數型成長”？

- |        |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|
| $x$    | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x)$ | 1 | 3 | 5 | 7 |
- (A)
- |        |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|
| $x$    | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x)$ | 8 | 4 | 2 | 1 |
- (B)
- |        |     |     |     |     |
|--------|-----|-----|-----|-----|
| $x$    | 1   | 2   | 3   | 4   |
| $f(x)$ | 0.2 | 0.4 | 0.8 | 1.6 |
- (C)
- |        |     |      |       |       |
|--------|-----|------|-------|-------|
| $x$    | 1   | 2    | 3     | 4     |
| $f(x)$ | 0.2 | 0.04 | 0.008 | 0.016 |
- (D)
- |        |   |    |    |    |
|--------|---|----|----|----|
| $x$    | 1 | 2  | 3  | 4  |
| $f(x)$ | 4 | 10 | 28 | 82 |
- (E)

5. 設  $a > 1 > b > 0$ ，關於下列不等式，請選出正確的選項。

- (A)  $(-a)^7 > (-a)^9$  (B)  $b^{-9} > b^{-7}$  (C)  $\log_{10} \frac{1}{a} > \log_{10} \frac{1}{b}$   
(D)  $\log_a 1 > \log_b 1$  (E)  $\log_a b \geq \log_b a$ 。

第三部分：填充題(50 分)

1. 試計算下列各小題的值：

- (1)  $(\frac{1}{\sqrt{10}})^{3x-1} = 10^{-2x+\frac{3}{2}}$ ，得  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。  
(2)  $(\log 5)^2 + \log 2 \cdot \log 50 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。  
(3)  $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 2 + \log_9 \frac{1}{8}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。  
(4) 解不等式  $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 < 0$ 。  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 若  $\log_2 3 = a$ ， $\log_9 2 = \frac{1}{ka}$ ，則  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 所有滿足  $\log_2 (x^2 + 2x) \leq 3$  的  $x$  值之範圍為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 坐標平面上，直線  $x=k$  與  $x=k+3$  分別與  $y=\log x$  的圖形交於  $A$ 、 $B$  兩點，且與  $x$  軸分別交於  $C$ 、 $D$  兩點，其中  $k>1$ 。若四邊形  $ACDB$  的面積為  $\frac{3}{2}$ ，則  $k$  之值為\_\_\_\_\_。

5. 設  $k>1$ ，在坐標平面上，已知  $A(0, 11)$ 、 $B(k, 0)$ ，且  $C$  為  $y=\log_2 x$  圖形上一點，若  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三點共線並滿足  $\overline{AC} : \overline{BC} = 8 : 3$ ，則  $k =$ \_\_\_\_\_。

6. 試求  $\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}})$  之值 = \_\_\_\_\_。

7. 設  $a = \log_2 5$ ， $b = \log_5 7$ ，試以  $a$ 、 $b$  表示  $\log_{20} 14$ 。\_\_\_\_\_。

8. 兩直線  $x=3$  和  $x=12$  分別與  $y=\log_2 x$  圖形相交於  $A$ 、 $B$  兩點，則  $\overrightarrow{AB}$  的斜率為\_\_\_\_\_。

9. 解方程式  $\log_x 8 - \log_2 x = -2$  且  $0 < x < 1$ ，則  $x =$ \_\_\_\_\_。

10. 連續投擲一公正骰子兩次，設出現的點數依序為  $a, b$ 。試問發生  $\log(a^2) + \log b > 1$  的機率為\_\_\_\_\_。

11. 設  $x > 0$ ， $y > 0$  且  $x + 2y = 6$ ，求  $\log_2 x + \log_4 y$  的最大值 = \_\_\_\_\_。

#### 第四部分：素養題(10分，需寫出詳細計算過程)

1. 警方於某日上午 6:30 在愛河發現了一具屍體，此時測量屍體溫度為  $30^\circ\text{C}$ 。當日 7:30 時，法醫到達命案現場，此時測得屍體溫度是  $28^\circ\text{C}$ 。法醫表示：「我們可以根據牛頓冷卻定律來推估死亡時間，牛頓冷卻定律為  $T(t) = H + (T_0 - H) \cdot e^{-kt}$ ，其中  $T(t)$  為物體經過  $t$  小時後的溫度， $T_0$  為物體的初始溫度， $H$  為物體周遭環境的溫度， $e$  及  $k$  皆為常數。」若當時命案現場環境的溫度  $20^\circ\text{C}$ ，且人活著時的正常體溫為  $36^\circ\text{C}$ ，則下列選項何者最接近此人的死亡時間？(已知  $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ )

(A) 早上 1:30 (B) 早上 2:30 (C) 早上 3:30 (D) 早上 4:30 (E) 早上 5:30。

2. 傳統相機的鏡頭上會標示光圈值( $F$ )，我們現在使用數位單眼相機拍照，或是某些可以設定的手機相機，也能調整光圈值來進行攝影。所謂的光圈值( $F$ )是鏡頭焦距長度( $FL$ )與光圈直徑( $D$ )的比值，即  $F = \frac{FL}{D}$ 。而光圈的直徑愈大，入光量就愈多，入光量與光圈面積成正比(假設光圈為一個圓)，請回答下列問題：

(1) 有一鏡頭的焦距為  $50 \text{ mm}$ ，現在設定光圈值為  $2$ ，則此時鏡頭的光圈直徑為多少  $\text{mm}$ ？

(2) 有一鏡頭的光圈值  $F_n$  滿足  $F_n = (\sqrt{2})^n$ ，其中  $n=1, 2, 3, 4, \dots$ ，在鏡頭上標示的光圈值  $1.4, 2, 2.8, 4, 5.6, \dots$ ，為  $F_n = (\sqrt{2})^n$  的近似值，即轉至光圈  $2.8$  時，實際的光圈值為  $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} \approx 2.8$ 。在鏡頭焦距不變的條件下，光圈值  $n=3$  的入光量為  $n=8$  的入光量之幾倍？

高雄市正義中學高中部 112 學年度第一學期 第二次期中考數學科試題

高二年 3 班 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

第一部分：單一選擇題 15% (每題 3 分)

1	2	3	4	5
(D)	(C)	(D)	(C)	(A)

第二部分：多重選擇題 25% (每答對一選項得 1 分，答錯不倒扣)

1	2	3	4	5
(B)(C)(D)(E)	(A)(B)(C)(E)	(C)(D)(E)	(B)(C)	(A)(B)

第三部分：填充題 50%

1-(1)	$x=2$	1-(2)	1
1-(3)	-1	1-(4)	$1 < x < 2$
2	2	3	$-4 \leq x < -2$ 或 $0 < x \leq 2$
4	2	5	$k=11$
6	2	7	$\frac{1+ab}{2+a}$
8	$\frac{2}{9}$	9	$\frac{1}{2}$
10	$\frac{3}{4}$	11	2

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
得分數	10	20	24	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	50

第四部分：素養題 10% (未列式或說明者，該題不予計分，每小題 5 分)

1.

警方於某日上午 6:30 在愛河上發現了一具浮體，此時測量屍體溫度為 30 °C。當日 7:30 時，法醫到達命案現場，此時測得屍體溫度是 28 °C。法醫表示：「我們可以根據牛頓冷卻定律來推估死亡時間，牛頓冷卻定律為  $T(t) = H + (T_0 - H) \cdot e^{-kt}$ ，其中  $T(t)$  為物體經過  $t$  小時後的溫度， $T_0$  為物體的初始溫度， $H$  為物體周遭環境的溫度， $e$  及  $k$  皆為常數。」若當時命案現場環境的溫度 20 °C，且人活著時的正常體溫為 36 °C，則下列選項何者最接近此人的死亡時間？(已知  $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ )

(A)早上 1:30 (B)早上 2:30 (C)早上 3:30 (D)早上 4:30 (E)早上 5:30。

答案：(D)

解析：設死亡時間為早上 6:30 之前  $t$  小時

依題目敘述得  $H=20$

時間	屍體溫度	
?	36 °C	
← 6:30	30 °C	
← 1 小時	← 7:30	28 °C

$$\begin{cases} T(t) = 20 + (36 - 20) \cdot e^{-kt} = 30 \\ T(1) = 20 + (30 - 20) \cdot e^{-k \cdot 1} = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-kt} = \frac{5}{8} \dots\dots\dots ① \\ e^{-k} = \frac{4}{5} \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

$$② \text{ 代入 } ① \text{ 得 } (e^{-k})^t = \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \log \left(\frac{5}{8}\right)^t = \log \frac{5}{8} \Rightarrow t (\log 4 - \log 5) = \log 5 - \log 8$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log 5 - \log 8}{\log 4 - \log 5} \approx \frac{0.6990 - 0.9030}{0.6020 - 0.6990} \approx 2.1$$

所以死亡時間大約為早上 4:30

故選(D)

2.(第一小題 2 分，第二小題 3 分)

傳統相機的鏡頭上會標示光圈值( $F$ )，我們現在使用數位單眼相機拍照，或是某些可以設定的手機相機，也能調整光圈值來進行攝影。所謂的光圈值( $F$ )是鏡頭焦距長度( $FL$ )與光圈直徑( $D$ )的比值，即  $F = \frac{FL}{D}$ 。而光圈的直徑愈大，入光量就愈多，入光量與光圈面積成正比(假設光圈為一個圓)，請回答下列問題：

(1)有一鏡頭的焦距為 50 mm，現在設定光圈值為 2，則此時鏡頭的光圈直徑為多少 mm？

(2)有一鏡頭的光圈值  $F_n$  滿足  $F_n = (\sqrt{2})^n$ ，其中  $n=1, 2, 3, 4, \dots$ ，在鏡頭上標示的光圈值 1.4, 2, 2.8, 4, 5.6,  $\dots$ ，為  $F_n = (\sqrt{2})^n$  的近似值，即轉至光圈 2.8 時，實際的光圈值為  $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} \approx 2.8$ 。在鏡頭焦距不變的條件下，光圈值  $n=3$  的入光量為  $n=8$  的入光量之幾倍？

答案：(1) 25 mm；(2) 32 倍

解析：(1) 依題意， $F=2$ ， $FL=50 \Rightarrow 2 = \frac{50}{D} \Rightarrow D=25$  (mm)

(2) 設  $n=3$  的光圈值為  $F_3$ ，光圈直徑為  $D_3$

$n=8$  的光圈值為  $F_8$ ，光圈直徑為  $D_8$

$$F_3 = \frac{FL}{D_3}, F_8 = \frac{FL}{D_8} \Rightarrow D_3 = \frac{FL}{F_3}, D_8 = \frac{FL}{F_8}$$

$$\frac{D_3}{D_8} = \frac{\frac{FL}{F_3}}{\frac{FL}{F_8}} = \frac{F_8}{F_3} = \frac{(\sqrt{2})^8}{(\sqrt{2})^3} = (\sqrt{2})^5$$

又入光量與光圈面積成正比

$$\frac{n=3 \text{ 的入光量}}{n=8 \text{ 的入光量}} = \frac{\pi \left(\frac{1}{2}D_3\right)^2}{\pi \left(\frac{1}{2}D_8\right)^2} = \left(\frac{D_3}{D_8}\right)^2 = ((\sqrt{2})^5)^2 = 2^5 = 32 \text{ (倍)}$$