

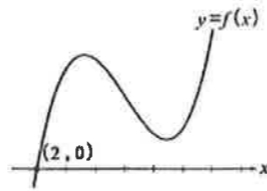
高雄市正義中學高中部 112 學年度第一學期期末考數學科試題

【高三自然組】

命題教師：吳孟珍

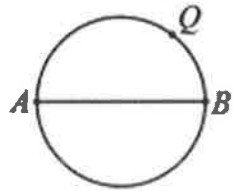
第一部分：單一選擇題 (每題 5 分，共 30 分)

1. 若三次多項式函數的函數圖形如右，且已知不等式 $x(x-2)(x-5)f(x) < 0$ 有 k 個整數解，試問 k 之值為下列何者？(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3 (5) 4



2. 已知一直角三角形的兩股長分別為 $\frac{\log 8}{\log 9}$ 與 $\frac{\log 4}{\log 3}$ ，若此直角三角形的周長為 $\log_3 x$ ，則 x 之值為下列何者？(1) 32 (2) 64 (3) 256 (4) 1024 (5) 4096

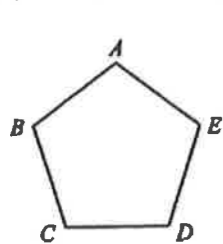
3. 下圖為一個以 $\overline{AB}=3$ 為直徑的圓，若 Q 為圓周上動點，試求 $4\overline{AQ}+3\overline{BQ}$ 的最大值為多少？(1) 10 (2) 15 (3) $5\sqrt{2}$ (4) $10\sqrt{2}$ (5) $15\sqrt{2}$



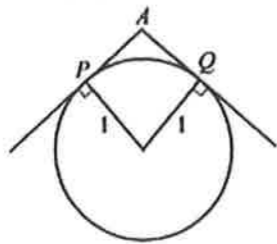
4. 甲、乙、丙三人到旋轉壽司餐廳用餐。餐廳現有 10 種壽司，每種壽司僅剩 2 盤。假設每種壽司每個人至多只能拿 1 盤，用完餐後發現每種壽司都至少有人拿了 1 盤。試問三人拿取壽司的組合共有幾種？(1) 2^{10} (2) 5^{10} (3) 6^{10} (4) 7^{10} (5) 8^{10}

5. 已知三條直線 $L_1: x+2y-1=0$ 、 $L_2: 2x+y+k=0$ 與 $L_3: kx+y+k-4=0$ 可以圍成一個三角形，且此三角形內切圓的圓心為 $C(-1,2)$ ，則下列何者為 k 值？(1) -5 (2) -2 (3) -1 (4) 1 (5) 2

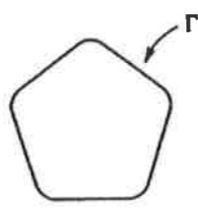
6. 已知有一正五邊形 $ABCDE$ ，如圖(1)，今我們希望分別在 5 個角的地方以圓滑的曲線取代尖銳的角，作法如下：作一個半徑為 1 單位長的圓與角 A 的兩個邊相切，設切點為 P, Q 則以 \widehat{PQ} 取代角 A ，如圖(2)，其餘 4 個角作相同的處理方法，最後得一圓滑的封閉曲線 Γ ，如圖(3)。試問： Γ 的周長比正五邊形 $ABCDE$ 的周長少多少單位長？



圖(1)



圖(2)



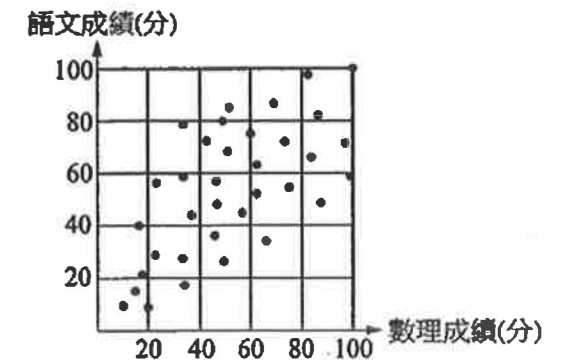
圖(3)

- (1) $10\tan 36^\circ - 2\pi$ (2) $5\sin 54^\circ - \pi$ (3) $10\cos 36^\circ - 2\pi$ (4) $\frac{5}{\sin 54^\circ} - \pi$ (5) $\frac{5}{\cos 36^\circ} - \pi$

第二部分：多重選擇題 (每題 5 分，共 30 分)

7. 設 $f(x)$ 是領導係數為正的三次多項式， $(x-1)^3$ 除 $f(x)$ 餘式為 $2x+3$ ，則下列選項哪些正確？
 (1) $y=f(x)$ 圖形的對稱中心點為 $(1,3)$
 (2) $f(3-\sqrt{2})+f(-1+\sqrt{2})=6$
 (3) $y=f(x)$ 圖形在對稱中心點處的一次近似為 $y=2x+3$
 (4) 方程式 $f(x)=0$ 可能有三個相異實根
 (5) $y=f(x)$ 圖形與直線 $3x-y+2=0$ 恰有三個相異交點

8. 右圖是 35 位學生的數理成績與語文成績的散布圖。若某位學生的數理成績不小於其語文成績的 1.5 倍，則稱這位學生「偏數理」；反之，若某位學生的語文成績不小於其數理成績的 1.5 倍，則稱這位學生「偏語文」。下列對於這 35 位學生的敘述，試選出正確的選項。



- (1) 「偏數理」的學生至少 7 位
 (2) 「偏語文」的學生至少 7 位
 (3) 「偏數理」的學生比「偏語文」的學生多
 (4) 「偏數理」的學生其數理成績的中位數大於「偏語文」的學生其語文成績的中位數
 (5) 「偏數理」的學生其數理成績的標準差大於「偏語文」的學生其語文成績的標準差

9. 某種疾病之檢驗方法不是百分之百正確，依過去經驗知患有此疾病的人經檢驗能正確判斷之可能性為 0.85，不患此病的人經檢驗做了錯誤判斷之可能性為 0.05。已知真實患有疾病的人數是所有人數的十分之一，若某人欲接受此檢驗，則下列哪些敘述正確？
 (1) 檢驗結果為患有疾病的機率大於十分之一
 (2) 若檢驗結果為患有疾病，則此人真實不患此病的機率大於 35%
 (3) 若檢驗結果為不患此病，則此人真實患有疾病的機率小於 1%
 (4) 若真實患病的人數比例下降，則整個檢驗被錯誤判斷的機率也會下降
 (5) 只要真實患有疾病的人數不歸零，那麼檢驗被錯誤判斷的機率必定大於 5%

10. 已知三次實係數函數 $f(x)=x^3+3x^2+1$ 可整理成 $f(x)=(x-a)^3+p(x-a)+k$ ，其中 a, p, k 為實數，則下列敘述哪些是正確的？
 (1) $ap=k$
 (2) $y=f(x)$ 的圖形對稱中心為 $(1,-3)$
 (3) $y=f(x)$ 的圖形可以由 $y=x^3-3x$ 的圖形向右平移 1 單位得之
 (4) $y=f(x)$ 的圖形經由適當的平移後會與 $y=x^3$ 的圖形重合
 (5) $y=f(x)$ 的圖形在 $x=a$ 附近的近似直線為 $y=-3x$

11. 在坐標空間中，已知兩直線 $L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+3a}{4} = \frac{z+2}{3}$ 與 $L_2: \frac{x-2a}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{1}$ ，其中 a 為實數，試選出正確的選項。

- (1) 點(3, 2, 4)可能在直線 L_1 上 (2) L_1 與 L_2 的方向向量互相平行
 (3) L_1 與 L_2 可能平行 (4) L_1 與 L_2 可能互為歪斜線 (5) L_1 與 L_2 可能交於一點

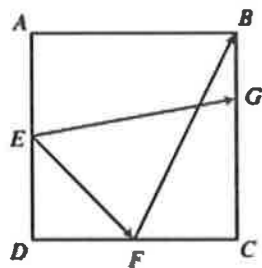
12. 設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ，已知在坐標平面上，直線 $L_1: x+2y=1$ 上的點經方陣 A 線性變換到直線 L_2 上，且直線 L_1 上的點經方陣 A^2 線性變換到直線 L_3 上，試選出正確的選項。

- (1) A 定義的線性變換是鏡射變換 (2) A^2 定義的線性變換是旋轉變換
 (3) 直線 L_1 與直線 L_2 的銳夾角為 45° (4) 直線 L_2 的斜率為 $\frac{1}{3}$ (5) 直線 L_3 的斜率為 -2

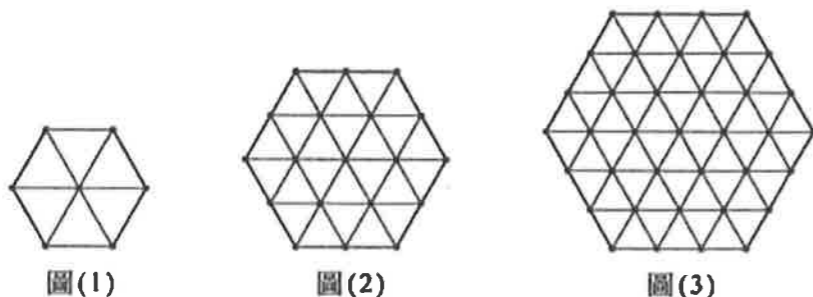
第三部分：填充題 (共30分)

13. 已知鍋中有紅豆湯圓 5 顆、花生湯圓 4 顆、芝麻湯圓 3 顆，且每顆湯圓的大小與外觀均相同。若阿華從鍋中任意舀取 5 顆湯圓，則至少有 3 顆紅豆湯圓的機率為_____。(化為最簡分數)

14. 如右圖，在正方形 $ABCD$ 中， E 為 \overline{AD} 邊之中點， F 為 \overline{CD} 邊之中點， G 在 \overline{BC} 邊上且 $\overline{CG} = 2\overline{BG}$ 。若 $\overrightarrow{EF} = a\overrightarrow{EG} + b\overrightarrow{FB}$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。



15. 用單位長的不鏽鋼條焊接如下圖的正六邊形，圖中的小黑點「●」為焊接點，在圖(1)中，用了 12 根不鏽鋼條，7 個焊接點；在圖(2)中，用了 42 根不鏽鋼條，19 個焊接點；在圖(3)中，用了 90 根不鏽鋼條，37 個焊接點。試問依此規則，圖(5)共需_____根不鏽鋼條。



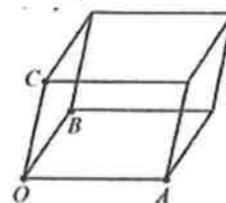
16. 若 m 為實數，且滿足聯立不等式 $\begin{cases} 2x+3y \leq 12 \\ mx-y \leq m \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 的所有點所形成區域面積為 $\frac{23}{4}$ 平方單位。

則 $m =$ _____。

17. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ， $A^{2023} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $a+b+c+d =$ _____。

18. 如圖，空間坐標中一平行六面體，某一底面的其中三個頂點為 $O(0,0,0)$ 、 $A(a_1, a_2, a_3)$ 、 $B(b_1, b_2, b_3)$ ，另一面之一頂點為 $C(2,2,1)$ ，已知 $2 \times \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 72$ ，

則 ΔOAB 面積的最小值為_____。



第四部分：混合題或非選擇題 (佔 10 分，此部分請寫出詳細計算過程)

說明：配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。

非選擇提請由左而右橫式書寫試，作答時需寫出計過程或理由，否則將酌予扣分。

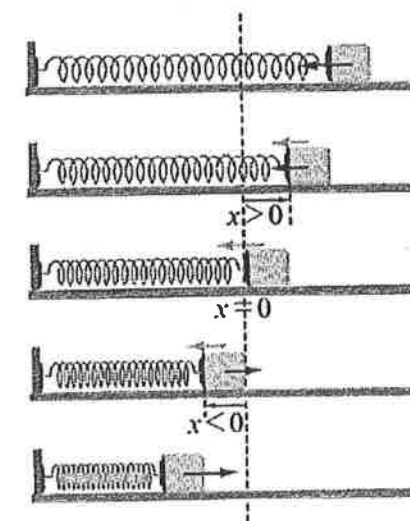
19-20 題為題組

將一木塊繫在彈簧之端點，放置於光滑水平桌上，將彈簧的另一端固定於牆上。當彈簧未被伸長或壓縮時，此時木塊位置稱為平衡點，將平衡點訂定為原點，方向向右為正，方向向左為負。若施力使彈簧向右伸長後放手，則木塊將會隨著彈簧左右震盪，如圖，在物理上稱這樣的運動為「簡諧運動」。在木塊開始運動後，記錄 0~8 秒內木塊的位置如下表：

時間(秒)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
位置	5	0	-5	0	5	0	-5	0	5

根據上述資料，試回答下列問題。

19. 已知木塊運動模式為週期運動，由上表可知週期為 T 秒，振幅為 h ，則數對 $(T, h) =$ _____。(4 分)
 20. 若木塊位置 x 與時間 t 的關係式可表示為 $x = a \sin(bt+c) + d$ ，求此關係式。
 ($a > 0, b > 0, 0 \leq c < 2\pi$) (6 分)



高雄市正義中學高中部 112 學年度第一學期期末考數學科答案卷

【高三自然組】

命題教師：吳孟珍

高三年_____班 座號：_____ 姓名：_____

第一部分：單一選擇題 30% (每題 5 分)

1	2	3	4	5	6
4	2	2	3	2	1

第二部分：多重選擇題 30% (每答對一選項得 1 分，答錯不倒扣)

7	8	9	10	11	12
35	25	145	15	145	234

第三部分：填充題 30% (配分如下量尺)

13	14	15	16	17	18
$\frac{41}{132}$	$(\frac{9}{11}, \frac{-7}{11})$	240	2	0	12

答對題數	1	2	3	4	5	6
得分	6	12	18	21	25	30

第四部分：混合題或非選擇題 (佔 10 分，此部分請寫出詳細計算過程)

說明：本部分共有 1 題組，每一組題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。

非選擇提請由左而右橫式書寫，作答時需寫出計過程或理由，否則將酌予扣分。

<p>19.(4%)(4,5)</p> <p>由表可知，位置 5 到下一個位置 5 經過 4 秒，可知週期為 4 秒，振幅為 $\frac{5 - (-5)}{2} = 5$</p>	<p>20.(6%) $x = 5 \sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2})$</p> <p>週期 $4 = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{\pi}{2}$</p> <p>振幅 $5 = a$</p> <p>平衡點 $0 = d$</p> <p>故可得 $x = 5 \sin(\frac{\pi}{2}t + c)$</p> <p>再將 $(t, x) = (0, 5)$ 代入上式</p> <p>$\Rightarrow 5 = 5 \sin(\frac{\pi}{2} \times 0 + c) \Rightarrow \sin c = 1$</p> <p>$\Rightarrow c = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$，其中 k 為整數</p> <p>已知 $0 \leq c < 2\pi$，故 $c = \frac{\pi}{2}$</p> <p>即 $x = 5 \sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2})$</p>
--	--