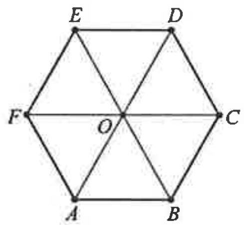
高雄市正義中學 高中部112學年度第一學期 期末考數學科試題

【高二 社會組】

出題老師：莊雅萍老師

第一部分：單一選擇題(每題3分，共15分)

(　　)1. 如圖所示，O為正六邊形之中心。試問下列哪個向量的終點P落在$\triangle ODE$內部(不含邊界)？

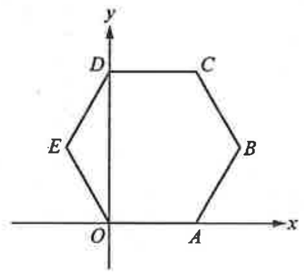


(A)$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$　(B)$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$

(C)$\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$　(D)$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$

(E)$\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$

(　　)2. 如附圖，$OABCDE$為坐標平面上一正六邊形，其中O為原點，A點坐標為$(2,0)$，則向量$\overrightarrow{DE}$之坐標表法為何？



(A) $(1,\sqrt{3})$
(B) $(-1,-\sqrt{3})$
(C) $(\sqrt{3},1)$
(D) $(-\sqrt{3},-1)$
(E) $(-1,\sqrt{3})$

(　　)3. 已知$\triangle ABC$面積為3，假設$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{x}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{y}$，若坐標平面上$P$點滿足$\overrightarrow{OP}=r\overrightarrow{x}+s\overrightarrow{y}$，$-1\le r\le 2$，$-\frac{3}{2}\le s\le\frac{1}{2}$，試求$P$點所在的區域面積為何？

(A) 6　(B) 18　(C) 36　(D) 30　(E) 15

(　　)4. 設$\triangle ABC$為平面上的一個三角形，P為平面上一點且$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，其中$t$為一實數。試問下列哪一選項為$t$的最大範圍，使得$P$落在$\triangle ABC$的內部？

(A)$0<t<\frac{1}{4}$　(B)$0<t<\frac{1}{3}$　(C)$0<t<\frac{1}{2}$　(D)$0<t<\frac{2}{3}$　(E)$0<t<\frac{3}{4}$

(　　)5. 已知a，b為整數且行列式$\begin{vmatrix}5 & a\\ b & 7\end{vmatrix}=4$，則絕對值$|a+b|$為何？

(A)16　(B)31　(C)32　(D)39　(E)條件不足，無法確定

第二部分：多重選擇題(每題5分，共25分)

(　　)1. 已知坐標平面上$\triangle ABC$，其中$\overrightarrow{AB}=(-4,3)$，且$\overrightarrow{AC}=(\frac{2}{5},\frac{4}{5})$。試選出正確的選項？

(A)$\overline{BC}=5$　(B)$\triangle ABC$是直角三角形　(C)$\triangle ABC$的面積為$\frac{11}{5}$

(D)$\sin B>\sin C$　(E)$\cos A>\cos B$

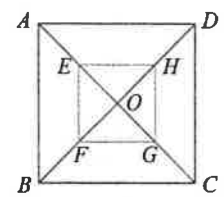
(　　)2. 下列哪些實數序組$(a_1，a_2，b_1，b_2)$滿足：$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)>(a_1b_1+a_2b_2)^2$

(A)(1，2，3，4)　(B)(1，2，3，5)　(C)(1，2，3，6)　(D)(0，8，0，7)　(E)(0，0，8，7)

(　　)3. 在坐標平面上，有一通過原點O的直線L，以及一半徑為2、圓心為原點O的圓Γ。P,Q為Γ上相異2點，且$\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}$分別與$L$所夾的銳角皆為30°，試選出內積$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$之值可能發生的選項？

(A)$2\sqrt{3}$　(B)$-2\sqrt{3}$　(C)0　(D)-2　(E)-4

(　　)4. 如附圖所示，O為正方形$ABCD$對角線的交點，且E，F，G，H分別為線段$\overline{OA}$，$\overline{OB}$，$\overline{OC}$，$\overline{OD}$的中點，試問下列選項哪些是正確的?



(A)$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{EF}$　(B)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{GC}$　(C)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}$

(D)$\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{BO}$　(E)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{OE}$

(　　)5. 設O，A，B，C為平面上相異四點，則下列各條件中，何者可確定A，B，C三點共線？

(A)$\overrightarrow{OB}=\frac{-5}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$　(B)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$　(C)$\overrightarrow{OA}=7\overrightarrow{BC}$

(D)$3\overrightarrow{BA}=4\overrightarrow{BC}$　(E)$A(1,2)$，$B(3,4)$，$C(5,6)$

第三部分：填充題（共 50 分）

1. 設 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是兩向量，且 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\perp\vec{b}$，試求 $|\vec{a}+\vec{b}|=$________。

2. $\triangle ABC$中，若 $\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=4$，$\overline{CA}=3$，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________。

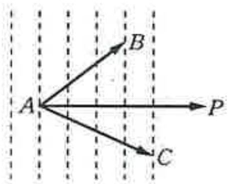
3. 已知 O 點不在直線 AB 上，若 A、B、C 相異三點共線，且 $\overrightarrow{OA}=(1+3t)\overrightarrow{OB}+(4-t)\overrightarrow{OC}$，其中 t 為實數。則 $t=$________。

4. 若 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 夾角為________。

5. 已知向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 垂直，且 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=4$，k 為實數，若 $k\vec{a}+\vec{b}$ 與 $2\vec{a}-\vec{b}$ 垂直，則 $k=$________。

6. 設 $A(1,2)$、$B(1,-2)$ 為平面上兩定點，點 P 為 x 軸正向上的一點。若內積 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=5$，則點 P 之坐標為________。

7. 如右圖，A、B、C 三點在一組等距離的平行線上，且 $\overline{AP}$ 與該組平行線垂直，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=12$，求 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=$________。



8. 若 $|x-109|+|x-110|\le k$ 有實數解，則實數 k 的範圍為________。

9. 在坐標平面上，$\triangle ABC$ 內有一點 P 滿足 $\overrightarrow{AP}=\left(\frac{4}{3},\frac{5}{6}\right)$ 及 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$。

   若 A，P 連線交 $\overline{BC}$ 於 M，則 $\overrightarrow{AM}=$________。（化成最簡分數）

10. 在$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=6$，$\angle BAC$ 的平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，且 I 為$\triangle ABC$的內心。

    (1) 若 $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則數對 $(\alpha,\beta)=$______。

    (2) 若 $\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對 $(x,y)=$______。

11. 設$\triangle OAB$面積為 3，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中 $0\le x\le 1$，$1\le y\le 3$，則 P 點所在的區域面積為________。

12. 設 $\vec{u}=(15,5)$ 且直線 $L：3x-y+2=0$，則 $\vec{u}$ 在 L 上的正射影為______。（以坐標表示法）

13. 設由 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 所張開的平行四邊形面積為 5，試求由 $\vec{a}+2\vec{b}$ 和 $3\vec{a}+4\vec{b}$ 所張開的平行四邊形面積為________。

14. 設 x,y 為實數，已知 $3x-2y=6$，則 $9x^2+2y^2$ 的最小值為______。

第四部分：非選素養題（共 10 分）

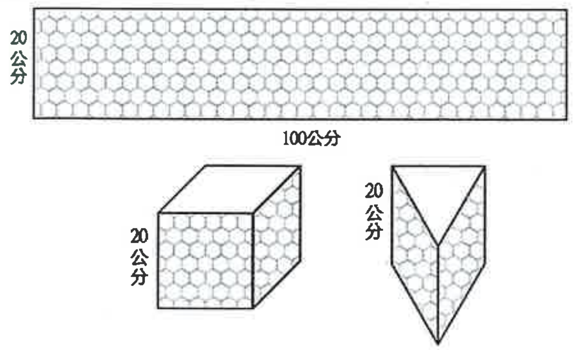
(一) 小明買了一玩具機器人，不只可控制向前走，還可旋轉至自己想要的方向後前進。

問題一：若此機器人在 $A(9,3)$ 處出發，面對著 $B(10,6)$ 的方向，前進至 B 點後，再旋轉 θ（$0<\theta<180°$），前進到 $C(6,4)$，則 $\theta=$？ (2 分)

為了玩家方便，這款機器人還可自行設定快速鍵將一串連續動作用一個快速鍵表示。小明設定了兩個快速鍵 $\vec{v_1}$ 鍵及 $\vec{v_2}$ 鍵，$\vec{v_1}=(4,-6)$ 的功能為向東 4 公尺及向南 5 公尺，$\vec{v_2}=(-1,9)$ 的功能為向西 1 公尺及向北 9 公尺。已知一開始此機器人從原點出發：

問題二：若小明想要按快速鍵使機器人前進到 $(8,18)$ 的位置，則需要按 $\vec{v_1}$ 鍵及 $\vec{v_2}$ 鍵各幾次？(3 分)

(二) 如附圖，有一片長 100 公分，寬 20 公分的包裝紙，現在要從長邊剪出 2 塊長方形，分別圍住一個底面為正方形和正三角形的禮盒側面一圈。



(1) 假設底面正方形的邊長是 x，正三角形的邊長是 y， 試用 x,y 表示出兩個禮物盒的體積總和。(2 分)

(2) 試問此兩個禮物盒底面邊長 x,y 各是多少時，禮物盒的體積和有最小值？ (3 分)

高雄市正義中學 高中部 112 學年度第一學期 期末考數學科答案卷

【高二-社會組】

【教師答案卷】

第一部分：單一選擇題 15%（每題 3 分）

1	2	3	4	5
(B)	(B)	(C)	(D)	(C)

第二部分：多重選擇題 25%（每答對一選項得 1 分，答錯不倒扣）

1	2	3	4	5
(B)(C)	(A)(B)	(D)(E)	(A)(B)(C)(D)	(D)(E)

第三部分：填充題 50%

1	$3\sqrt{2}$	9	$(\frac{40}{21},\frac{25}{21})$
2	$-\frac{3}{2}$	10(1)	$(\frac{3}{5},\frac{2}{5})$
3	-2	10(2)	$(\frac{2}{5},\frac{4}{15})$
4	120°	11	12
5	2	12	(3,9)
6	(4,0)	13	10
7	16	14	12
8	$k\ge 1$		

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
得分數	10	20	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	47	50

第四部分：素養題 10%（未列式或說明者，該題不予計分，每小題 5 分）

（一）問題一：若此機器人在 $A(9,3)$處出發，面對著 $B(10,6)$的方向，前進至 B 點後，再旋轉 θ $(0<\theta<180°)$，前進到 $C(6,4)$，則 $\theta=$？ (2 分)

問題二：若小明想要按快速鍵使機器人前進到(8,18)的位置，則需要按 $\overrightarrow{v_1}$ 鍵及 $\overrightarrow{v_2}$ 鍵各幾次？(3 分)

答案：(1) 135°；(2) $\overrightarrow{v_1}$ 3 次，$\overrightarrow{v_2}$ 4 次；

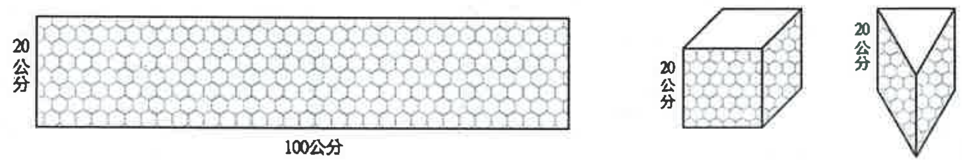
解析：問題一：$\overrightarrow{AB}=(1,3)$，$\overrightarrow{BC}=(-4,-2)$，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{-4-6}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}}=\frac{-10}{10\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}，\quad \theta=135°。$$

問題二：設 $\overrightarrow{v_1}$ 按了 n 次，$\overrightarrow{v_2}$ 按了 m 次，則 $n(4,-6)+m(-1,9)=(8,18)$，

即 $(4n-m,-6n+9m)=(8,21)$，$\Rightarrow\begin{cases}4n-m=8\\-6n+9m=18\end{cases}$ 可得 $n=3,m=4$。

（二）



(1) 假設底面正方形的邊長是 x，正三角形的邊長是 y， 試用 x,y 表示出兩個禮物盒的體積總和。(2 分)

(2) 試問此兩個禮物盒底面邊長 x,y 各是多少時，禮物盒的體積和有最小值？ (3 分)

答案：(1) $20x^2+5\sqrt{3}y^2$；(2) $\frac{50000}{11}(3\sqrt{3}-4)$

解析：(1) 體積 $V=20x^2+20\times\frac{\sqrt{3}}{4}y^2=20x^2+5\sqrt{3}y^2$。

(2) 由柯西不等式可知：

$$[(\sqrt{20})^2+(\sqrt[4]{75}\,y)^2][(\frac{2}{\sqrt{5}})^2+(\frac{3}{\sqrt[4]{75}})^2]\ge(4x+3y)^2\Rightarrow V\ge\frac{10000}{\frac{4}{5}+\frac{3\sqrt{3}}{5}}=\frac{50000}{11}(3\sqrt{3}-4)。$$

等號成立於 $\frac{\sqrt{20}x}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt[4]{75}y}{\frac{3}{\sqrt[4]{75}}}=t$，將 $x=\frac{1}{5}t$，$y=\frac{\sqrt{3}}{5}t$ 代入 $4x+3y=100$，得 $t=\frac{500}{4+3\sqrt{3}}$。

故當 $x=\frac{100}{11}(3\sqrt{3}-4)$，$y=\frac{100}{11}(27-4\sqrt{3})$ 時，禮物盒的體積和有最小值 $\frac{50000}{11}(3\sqrt{3}-4)$。