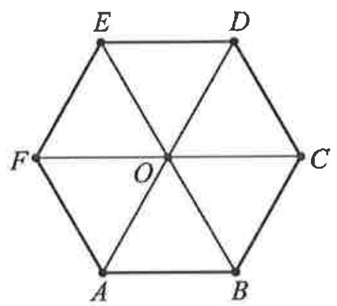
高雄市正義中學高中部 112 學年度第一學期 期末考數學科試題

【高二】自然組

出題老師：莊雅萍、余慕貞

第一部分：單一選擇題 (每題 3 分，共 15 分)

1. 如右圖所示，O 為正六邊形之中心。
試問下列哪個向量的終點 P 落在$\triangle ODE$ 內部（不含邊界）？

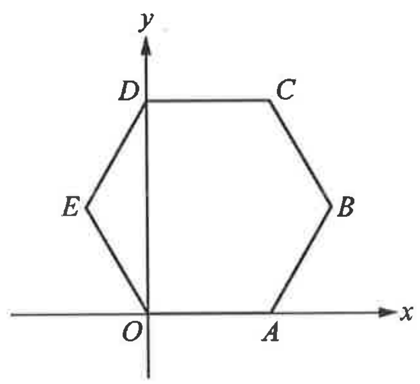


(A)$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$　(B)$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$

(C)$\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$　(D)$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$

(E) $\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$

2. 如右圖，$OABCDE$ 為坐標平面上一正六邊形，
其中 O 為原點，A 點坐標為 $(2,0)$，則向量$\overrightarrow{DE}$之坐標表法為？



(A) $(1,\sqrt{3})$　(B) $(-1,-\sqrt{3})$

(C) $(\sqrt{3},1)$　(D) $(-\sqrt{3},-1)$

(E) $(-1,\sqrt{3})$

3. 已知$\triangle ABC$ 面積為 3，假設$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{x}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{y}$，若坐標平面上 P 點滿足$\overrightarrow{OP}=r\overrightarrow{x}+s\overrightarrow{y}$，
$-1\le r\le 2$，$-\frac{3}{2}\le s\le\frac{1}{2}$，試求 P 點所在的區域面積為何？

(A) 6　(B) 18　(C) 36　(D) 30　(E) 15

4. 設$\triangle ABC$ 為平面上的一個三角形，P 為平面上一點且$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，其中 t 為一實數。
試問下列哪一選項為 t 的最大範圍，使得 P 落在$\triangle ABC$ 的內部？

(A)$0<t<\frac{1}{4}$　(B)$0<t<\frac{1}{3}$　(C)$0<t<\frac{1}{2}$　(D)$0<t<\frac{2}{3}$　(E)$0<t<\frac{3}{4}$

5. 已知$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=2$，$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=4$，則$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$之值為？

(A)-4　(B)-3　(C)-1　(D)2　(E)5

第二部分：多重選擇題 (每題 5 分，共 25 分)

1. 已知坐標平面上$\triangle ABC$，其中$\overrightarrow{AB}=(-4,3)$，且$\overrightarrow{AC}=(\frac{2}{5},\frac{4}{5})$。試選出正確的選項。

(A)$\overline{BC}=5$

(B)$\triangle ABC$ 是直角三角形

(C)$\triangle ABC$ 的面積為$\frac{11}{5}$

(D)$\sin B>\sin C$

(E)$\cos A>\cos B$

2. 下列哪些實數序組 (a_1,a_2,b_1,b_2) 滿足：$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)>(a_1b_1+a_2b_2)^2$。

(A)$(1,2,3,4)$

(B)$(1,2,3,5)$

(C)$(1,2,3,6)$

(D)$(0,8,0,7)$

(E)$(0,0,8,7)$

3. 在坐標平面上，有一通過原點 O 的直線 L，以及一半徑為 2、圓心為原點 O 的圓 Γ。
P,Q 為 Γ 上相異 2 點，且$\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}$分別與 L 所夾的銳角皆為 $30°$，試選出內積$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$之值可能發生的選項。

(A)$2\sqrt{3}$

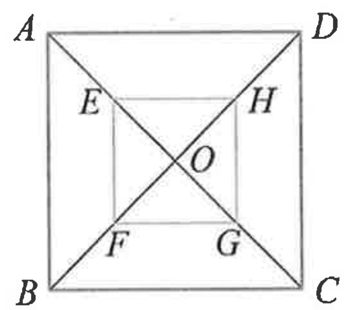
(B)$-2\sqrt{3}$

(C)0

(D)-2

(E)-4

4. 如右圖所示，O 為正方形 $ABCD$ 對角線的交點，
且 E，F，G，H 分別為線段$\overline{OA}$，$\overline{OB}$，$\overline{OC}$，$\overline{OD}$的中點，
試問下列選項哪些是正確的？



(A)$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{EF}$

(B)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{GC}$

(C)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}$

(D)$\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{BO}$

(E)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{OE}$

5. 設 O，A，B，C 為平面上相異四點，則下列各條件中，何者可確定 A，B，C 三點共線？

(A)$\overrightarrow{OB}=\frac{-5}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$

(B)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$

(C)$\overrightarrow{OA}=7\overrightarrow{BC}$

(D)$3\overrightarrow{BA}=4\overrightarrow{BC}$

(E)$A(1,2)$，$B(3,4)$，$C(5,6)$

第三部分：填充題 (50 分)

1. 設 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是兩向量，且 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\perp\vec{b}$，試求 $|\vec{a}+\vec{b}|=$ ____(1)____。

2. 已知 O 點不在直線 AB 上，若 A、B、C 相異三點共線，且 $\overrightarrow{OA}=(1+3t)\overrightarrow{OB}+(4-t)\overrightarrow{OC}$，

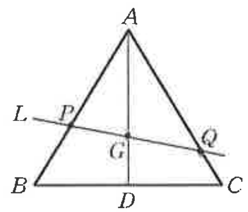
   其中 t 為實數。則 $t=$ ____(2)____。

3. 若 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 夾角為 ____(3)____。

4. 若 $|x-109|+|x-110|\le k$ 有實數解，則實數 k 的範圍為 ____(4)____。

5. 如右圖，$\triangle ABC$ 中，G 為重心，過 G 作任一直線 L 交 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於 P、Q，

   $P\neq A$，$Q\neq A$，則 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}}+\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AQ}}=$ ____(5)____。

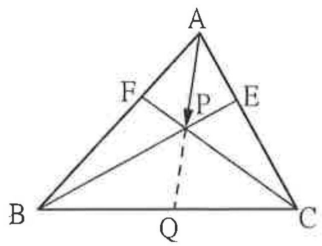


6. 如右圖，$\triangle ABC$ 中，點 E 在 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{AE}:\overline{EC}=3:4$，點 F 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AF}:\overline{FB}=1:2$，

   設 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CF}$ 交點 P。

   (1) 若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對 $(x,y)=$ ____(6-1)____。

   (2) 若延長直線 AP 交線段 $\overline{BC}$ 於 Q，則 $\overline{AP}:\overline{AQ}=$ ____(6-2)____。



7. 四邊形 $ABCD$，兩對角線 $\overline{AC}$，$\overline{BD}$ 互相垂直且交於 E 點，

   $\overline{AE}=4$，$\overline{BE}=6$，$\overline{CE}=8$，$\overline{DE}=4$，求向量內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ 的值為 ____(7)____。

8. 設平面上三向量 $\vec{a}=(2,3)$，$\vec{b}=(1,k)$，$\vec{c}=(4,5)$，依下列條件求 k 值。

   (1) 若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角為 θ，且 $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，則 $k=$ ____(8-1)____。

   (2) 若 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上之正射影與 $\vec{c}$ 在 $\vec{b}$ 方向上之正射影相同，則 $k=$ ____(8-2)____。

9. 已知 x，y 為實數，且 $x^2+y^2=16$，則 $3x-4y+5$ 的最大值為 ____(9)____。

10. 設 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，若 $\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=5$，且 $\overrightarrow{BI}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$，求 $(x,y)=$ ____(10)____。

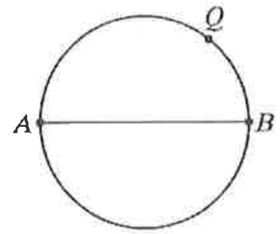
11. 設 P 為 $\triangle ABC$ 所在平面上任一點，且滿足 $5\overrightarrow{AP}=6\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$，求 $\dfrac{\triangle ABP\text{ 面積}}{\triangle ABC\text{ 面積}}=$ ____(11)____。

12. $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 是平面上三個非零向量，若 $|\vec{a}|=25$，$|\vec{b}|=17$，則滿足 $\vec{a}$ 在 $\vec{c}$ 上的正射影長為 15，

    且 $\vec{b}$ 在 $\vec{c}$ 上的正射影長亦為 15 的情況下，$\vec{a}$、$\vec{b}$ 所圍的平行四邊形面積最大值為 ____(12)____。

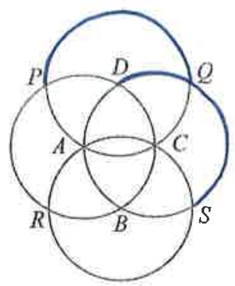
13. 右圖為以 $\overline{AB}=3$ 為直徑的圓，若 Q 為圓周上的動點，

    試求 $4\overline{AQ}+3\overline{BQ}$ 的最大值為 ____(13)____。



第四部分：素養題【務必將計算過程寫在答案卷，才予以計分】(10 分)

1. 如下圖，A、B、C、D 為四圓圓心，D、C、B 三點於圓 A 上，D、A、B 於圓 C 上。四圓半徑皆為 1，其於交點 P、Q、R、S 如右圖所示，試求 $\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{CR}$ 之值。(4 分)

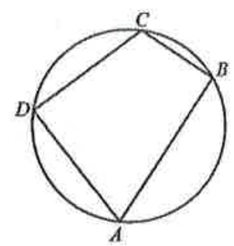


2. 已知一個圓形湖泊，A、B、C、D 在圓上。暑假期間旅遊公司推出遊湖行程，其規劃的路徑是船從 A 點出發，沿著向量 $\vec{v}=(1,2)$ 前進 300 公尺到達休息站 B，在沿著 $\vec{u}=(-2,1)$ 前進 200 公尺到達休息站 C，接著再從休息站 C 沿著直線前進到最後一個休息站 D，最後再沿著直線前進返回一開始出發地 A 點。求：

   (1)湖泊直徑長為多少公尺？(1 分)

   (2) $\triangle ACD$ 面積最大值？(2 分)

   (3) $\overline{AD}+\overline{CD}$ 的最大值？(3 分)



高雄市正義中學高中部112學年度第一學期　期末考數學科試題

高二年3班　　座號：______姓名：________________

第一部分：單一選擇題　15%（每題3分）

1	2	3	4	5
B	B	C	D	B

第二部分：多重選擇題　25%（每答對一選項得1分，答錯不倒扣）

1	2	3	4	5
BC	AB	DE	ABCD	DE

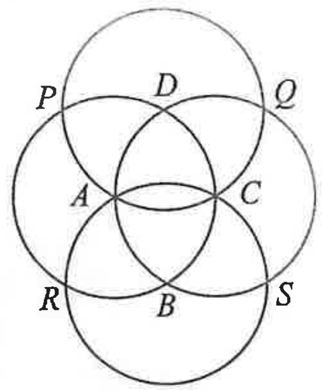
第三部分：填充題 50%

1	$3\sqrt{2}$	2	-2
3	120°	4	$k \geq 1$
5	3	6-1	$(\frac{2}{9},\frac{1}{3})$
6-2	5：9	7	-56
8-1	$-\frac{7}{4}$	8-2	-1
9	25	10	(1/3，4/15)
11	(4/5)	12	420
13	15		

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
得分數	10	15	20	25	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	50

第四部分：素養題10%（未列式或說明者，該題不予計分，每小題5分）

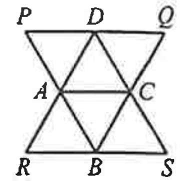
3. 如下圖，A、B、C、D為四圓圓心，D、C、B三點於圓A上，D、A、B於圓C上。四圓半徑皆為1，其於交點PQRS如右圖所示，試求$\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{CR}$之值。



四圓半徑皆為1，因此可得ΔPAD為正三角形

同理ΔDAC、ΔDCQ、ΔARB、ΔACB、ΔCBS亦同

故可以右圖思考



令$\overrightarrow{PD}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PA}=\vec{b}$，$\overrightarrow{DA}=\vec{b}-\vec{a}$

且$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1\times\cos60^\circ=\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{CR}=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{b}-2\vec{a})$

$=-2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{-3}{2}$

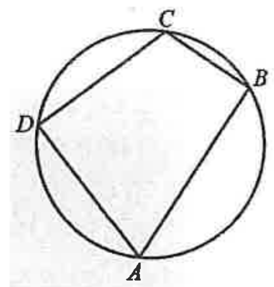
解：

4. 已知一個圓形湖泊，A、B、C、D在圓上。暑假期間旅遊公司推出遊湖行程，其規劃的路徑是船從A點出發，沿著向量$\vec{v}=(1,2)$前進300公尺到達休息站B，在沿著$\vec{u}=(-2,1)$前進200公尺到達休息站C，接著再從休息站C沿著直線前進到最後一個休息站D，最後再沿著直線前進返回一開始出發地A點。求：

(1)湖泊直徑長為多少公尺？(1分)

(2)ΔACD面積最大值？(2分)

(3)$\overline{AD}+\overline{CD}$的最大值？(3分)



解：

(1)$100\sqrt{13}$

(2)32500平方公尺

(3)$100\sqrt{26}$