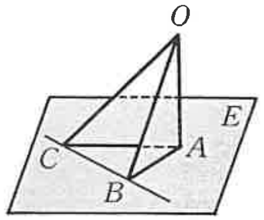
高雄市正義中學 高中部 112 學年度第二學期 期初考數學科試題

【高二 社會組】

出題老師：梁瑞龍老師

第一部分：單一選擇題 (每題 3 分，共 15 分)

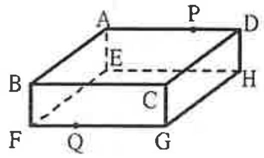
1. 如附圖，$\overline{OA}$垂直平面 E 於 A，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$（$\overline{BC}$在 E 上）。



若$\overline{OA}=3$，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=12$，則$\overline{OC}$之長為何？

(A)5　(B)11　(C)13　(D)15　(E)以上皆非

2. 長方體 $ABCD-EFGH$（如附圖）中，$\overline{AB}=2$，$\overline{AE}=1$，$\overline{AD}=3$，



$\overline{AP}=2$，$\overline{FQ}=1$，則$\overline{PQ}$的長為何？

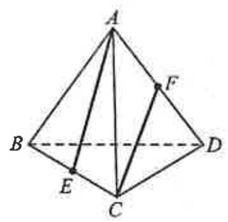
(A)$\sqrt{6}$　(B)$\sqrt{2}$　(C)2　(D)$\sqrt{5}$　(E)$\sqrt{3}$

3. $A(-1,2,1)$，$B(1,0,2)$，O為原點，若$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{BC}\,//\,\overrightarrow{OA}$，

則$\overrightarrow{OC}=(a,b,c)$，求 $a+b+c=$？

(A)-3　(B)-5　(C)-7　(D)-9　(E)-11

4. 在稜長為 1 的正四面體 $ABCD$ 中，E，F分別是$\overline{BC}$，$\overline{AD}$的中點，



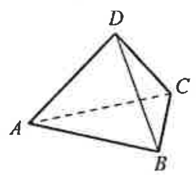
$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}=$？

(A) 0　(B)$\dfrac{1}{2}$　(C)$\dfrac{3}{4}$　(D)$-\dfrac{1}{2}$　(E)$-\dfrac{3}{4}$

5. 附圖是正四面體，且 $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,3)$, $D(3,3,3)$，

試問四面體 $ABCD$ 的體積為何？

(A) 6　(B) 9　(C) 12　(D) 24　(E) 36



第二部分：多重選擇題 (每題 5 分，共 25 分)

1. 下列有關空間幾何的敘述，哪些是正確的？

(A)平面上，若兩相異直線不相交，則它們必平行

(B)空間中，若兩相異直線不相交，則它們必平行

(C)空間中，過平面外一點，恰有一直線與此平面垂直

(D)空間中，會有兩個相異平面只交一個點

(E)空間中，通過直線外一點，恰有一直線與此直線垂直

2. 設點 $P(1,-2,3)$為空間中一點，O為原點，則下列敘述何者正確？

(A)P點在 y 軸上的正射影點為$(0,-2,0)$

(B)P點到 z 軸的距離為 3

(C)P點對於 xz 平面的對稱點為$(-1,2,-3)$

(D)線段$\overline{OP}$ 的長為$\sqrt{14}$

(E)線段$\overline{OP}$ 在 xy 平面上的正射影長為$\sqrt{5}$

3. 設 $A(3,-1,2)$、$B(2,1,1)$，在 xz 平面上找一點 C，使得$\triangle ABC$為正三角形，則 C點坐標可能為哪些？

(A)$(3,0,1)$　(B)$(1,0,3)$　(C)$(0,3,0)$　(D)$(4,0,0)$　(E)$(0,0,4)$

4. 若$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=4$，則下列哪些是正確的？

(A)$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-4$　(B)$\begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=8$　(C)$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=-4$

(D)$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=4$　(E)$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{vmatrix}=8$

5. 下列哪些向量與$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$垂直？

(A)$2\overrightarrow{a}$　(B)$3\overrightarrow{b}$　(C)$2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}$　(D)$2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$　(E)$2\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$

第三部分：填充題 (50 分)

1. 設 $\overrightarrow{a}=(-6,2,2)$，$\overrightarrow{b}=(2,4,2)$，求 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角為______。

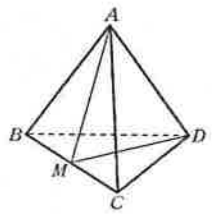
2. 若 $\overrightarrow{a}=(1,1,2)$，$\overrightarrow{b}=(3,1,3)$，則 $|2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}|=$______。

3. 設 $\triangle ABC$ 中，$A(-3,4,2)$，$B(0,7,3)$，重心坐標為 $(2,6,4)$，則 C 點坐標為______。

4. 在空間坐標中，設 xy 平面為一鏡面。有一光線通過點 $P(1,2,1)$ 射向鏡面上的點 $O(0,0,0)$，經鏡面反射後通過點 R，若 $\overline{OR}=2\overline{PO}$，則 R 點的坐標為______。

5. 設 A,B 為空間中相異兩點，O 點不在直線 AB 上，且 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 所圍成平行四邊形面積為 3，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中 $1\le x\le 3$，$2\le y\le 6$，則 P 點所在的區域面積為______。

6. 四面體 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=13$，$\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DB}=10$，$\overline{AD}=\sqrt{99}$，銳角 θ 是平面 ABC 和平面 BCD 的夾角，求 $\cos\theta=$______。



7. 已知 $\overrightarrow{u}=(3,2,4)$，$\overrightarrow{v}=(2,1,-1)$，若 $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+t\overrightarrow{v}$，$t$ 為實數，則 $t=$___(1)___時，$\overrightarrow{w}$ 有最小的長度___(2)___。

8. 若 $A(-1,3,2)$，$B(1,0,2)$，$C(k+3m,1,2k-m)$ 三點共線，則 $m+k=$______。

9. 設 $\overrightarrow{a}=(-2,1,-1)$，$\overrightarrow{b}=(4,p,q)$，$\overrightarrow{c}=(r,3,1)$，若 $\overrightarrow{a}\,/\!/\,\overrightarrow{b}$ 且 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{c}$，則 $p+q+r=$______。

10. 設 $\overrightarrow{a}=(2,-1,-2)$，$\overrightarrow{b}=(0,-3,4)$，$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$，當 $\overrightarrow{c}$ 平分 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角時，$t=$______。

11. 空間中三點 $A(3,1,2)$、$B(-5,4,8)$、$C(-1,1,5)$，B 在 $\overleftrightarrow{AC}$ 上投影點為 D，則 D 坐標為______。

12. 周長為 3 的三角形中，則三邊長平方和的最小值為______。

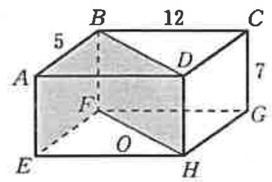
13. 設 x，y，z 為實數且滿足 $x-2y+2z=5$，則 $(x+5)^2+(y-1)^2+(z+3)^2$ 之最小值為______。

14. 求 $\begin{vmatrix} 1 & 99 & 99^2 \\ 1 & 100 & 100^2 \\ 1 & 101 & 101^2 \end{vmatrix}=$______。

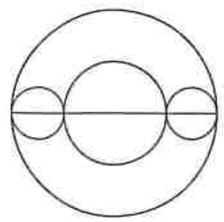
15. 設 $\overrightarrow{a}=(2,k,1)$，$\overrightarrow{b}=(1,1,2)$，$\overrightarrow{c}=(1,-3,1)$，若由 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 所張開的平行六面體的體積為 10，則 k 的值為______。

第四部分：素養題 10%

1. 設 $ABCD$-$EFGH$ 為一長方體(如圖)，其中 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=12$，$\overline{CG}=7$。設半平面 $ABFE$ 與半平面 $BDHF$ 所成二面角的度量 θ，求 $\sin\theta$ 之值＝______。



2. 一直徑為 48 公尺的圓形草坪，欲將直徑分成三段，並建造分別以此三段為直徑的圓形花圃，如附圖，則：(1)這三個圓形花圃應如何建造，才能使三個圓形花圃的面積和為最小？(請說明)(3 分)
(2) 承上題，求此三圓面積和的最小值為何？(3 分)



高雄市正義中學 高中部 112 學年度第二學期 期初考數學科答案卷

【高二 社會組】

【教師答案卷】

第一部分：單一選擇題 15%（每題 3 分）

1	2	3	4	5
(C)	(A)	(C)	(D)	(B)

第二部分：多重選擇題 25%（每答對一選項得 1 分，答錯不倒扣）

1	2	3	4	5
(A)(C)(E)	(A)(D)(E)	(B)(D)	(B)(C)(D)(E)	(A)(B)(C)(D)

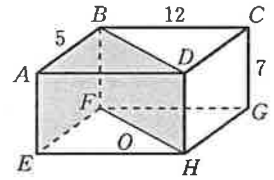
第三部分：填充題 50%

1	$90°$	8	$\frac{15}{21}$
2	$5\sqrt{3}$	9	1
3	$(9,7,7)$	10	$\frac{3}{5}$
4	$(-2,-4,2)$	11	$(-5,1,8)$
5	24	12	3
6	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	13	36
7(1)	$-\frac{2}{3}$	14	2
7(2)	$\frac{\sqrt{237}}{3}$	15	$k=0$ 或 -20

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
得分數	10	20	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50

第四部分：素養題 10%（未列式或說明者，該題不予計分）

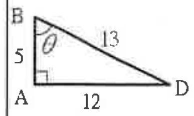
1. 設 $ABCD$-$EFGH$ 為一長方體（如圖），其中 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=12$，$\overline{CG}=7$。
設半平面 $ABFE$ 與半平面 $BDHF$ 所成二面角的度量 θ，求 $\sin\theta$ 之值＝______。



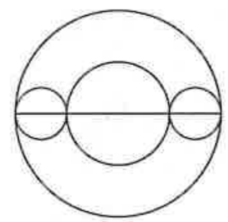
答案：$\frac{12}{13}$

解析：$\overline{BD}=\sqrt{5^2+12^2}=13$

設 $\angle ABD=\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{12}{13}$



2. 一直徑為 48 公尺的圓形草坪，欲將直徑分成三段，並建造分別以此三段為直徑的圓形花圃，如附圖所示，則：
(1)這三個圓形花圃應如何建造，才能使三個圓形花圃的面積和為最小？(請說明)(3 分)
(2) 承上題，求此三圓面積和的最小值為何？(3 分)



答案：見解析

解析：如附圖，設三圓形花圃的半徑分別為 x,y,z，
則 $2x+2y+2z=48 \Rightarrow x+y+z=24$，
且三個圓形花圃的面積和為 $\pi(x^2+y^2+z^2)$。
由柯西不等式，得
$(x^2+y^2+z^2)(1^2+1^2+1^2)\ge(x+y+z)^2$
$\Rightarrow (x^2+y^2+z^2)\cdot 3\ge 24^2$
$\Rightarrow (x^2+y^2+z^2)\ge\frac{24^2}{3}=192$
∴ 三個圓形花圃的最小面積和為 192π(平方公尺)

此時 $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1} \Rightarrow$ 令 $x=t$，$y=t$，$z=t$，t 為實數，
代入 $x+y+z=24$，
得 $t+t+t=24 \Rightarrow t=8 \Rightarrow x=8$，$y=8$，$z=8$，
即三個圓形花圃的半徑均為 8 公尺，如附圖。