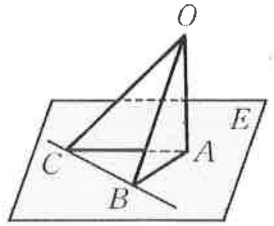
高雄市正義中學 高中部 112 學年度第二學期 第一次期中考數學科試題

【高二 自然組】

出題老師：梁瑞龍、余慕貞老師

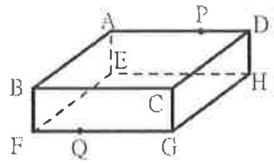
第一部分：單一選擇題 (每題 4 分，共 20 分)



1. 如附圖，$\overline{OA}$垂直平面 E 於 A，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$($\overline{BC}$在 E 上)。

   若$\overline{OA}=3$，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=12$，則$\overline{OC}$之長為何？

   (A)5　(B)11　(C)13　(D)15　(E)以上皆非



2. 長方體 $ABCD-EFGH$（如附圖）中，$\overline{AB}=2$，$\overline{AE}=1$，$\overline{AD}=3$，

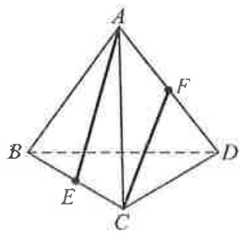
   $\overline{AP}=2$，$\overline{FQ}=1$，則$\overline{PQ}$的長為何？

   (A)$\sqrt{6}$　(B)$\sqrt{2}$　(C)2　(D)$\sqrt{5}$　(E)$\sqrt{3}$

3. $A(-1,2,1)$，$B(1,0,2)$，O 為原點，若$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{BC}\,//\,\overrightarrow{OA}$，

   則$\overrightarrow{OC}=(a,b,c)$，求 $a+b+c=$？

   (A)-3　(B)-5　(C)-7　(D)-9　(E)-11



4. 在稜長為 1 的正四面體 $ABCD$ 中，E，F 分別是$\overline{BC}$，$\overline{AD}$的中點，

   $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}=$？ (A)0　(B)$\frac{1}{2}$　(C)$\frac{3}{4}$　(D)$-\frac{1}{2}$　(E)$-\frac{3}{4}$

5. 空間中，$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$皆為非零向量，已知$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}$，且$\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$平行。
   若$|\overrightarrow{OA}|=4$，且令$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$所張成的四邊形面積為T_1，$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OC}$所張成的四邊形面積為T_2，
   $\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$所張成的四邊形面積為T_3，則$T_1+T_2+T_3$之值為下列哪一個選項？
   (A)-3　(B)-5　(C)-7　(D)-9　(E)-11

第二部分：多重選擇題 (每題 5 分，共 25 分)

1. 下列有關空間幾何的敘述，哪些是<u>正確的</u>？
   (A)平面上，若兩相異直線不相交，則它們必平行
   (B)空間中，若兩相異直線不相交，則它們必平行
   (C)空間中，過平面外一點，恰有一直線與此平面垂直
   (D)空間中，會有兩個相異平面只交一個點
   (E)空間中，通過直線外一點，恰有一直線與此直線垂直

2. 設點 $P(1,-2,3)$為空間中一點，O 為原點，則下列敘述何者<u>正確</u>？
   (A)P 點在 y 軸上的正射影點為$(0,-2,0)$
   (B)P 點到 z 軸的距離為 3
   (C)P 點對於 xz 平面的對稱點為$(-1,2,-3)$
   (D)線段$\overline{OP}$的長為$\sqrt{14}$
   (E)線段$\overline{OP}$在 xy 平面上的正射影長為$\sqrt{5}$

3. 設 $A(3,-1,2)$、$B(2,1,1)$，在 xz 平面上找一點 C，使得$\triangle ABC$為正三角形，則 C 點坐標可能為哪些？
   (A)$(3,0,1)$　(B)$(1,0,3)$　(C)$(0,3,0)$　(D)$(4,0,0)$　(E)$(0,0,4)$

4. 若$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=4$，則下列哪些是<u>正確的</u>？

   (A)$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-4$　(B)$\begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=8$　(C)$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=-4$

   (D)$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=4$　(E)$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{vmatrix}=8$

5. 下列哪些向量與$\vec{a}\times\vec{b}$垂直？
   (A)$2\vec{a}$　(B)$3\vec{b}$　(C)$2\vec{a}-3\vec{b}$　(D)$2\vec{a}+3\vec{b}$　(E)$2\vec{b}\times\vec{a}$

第三部分：填充題(45分)

1. 設 $A(1,-1,2)$，$B(3,1,3)$，$C(-4,-2,-4)$，則：

   (1) $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上之正射影為______。

   (2)點 C 在直線 AB 上之投影點坐標為______。

   (3)三角形 ABC 的面積為______。

   (4)點 C 至直線 AB 的距離為______。

2. 設 $\overrightarrow{a}=(-2,1,-1)$，$\overrightarrow{b}=(4,p,q)$，$\overrightarrow{c}=(r,3,1)$，若 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$ 且 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{c}$，則 $p+q+r=$______。

3. 在空間坐標中，設 xy 平面為一鏡面。有一光線通過點 $P(1,2,1)$ 射向鏡面上的點 $O(0,0,0)$，經鏡面反射後通過點 R，若 $\overline{OR}=2\overline{PO}$，則 R 點的坐標為______。

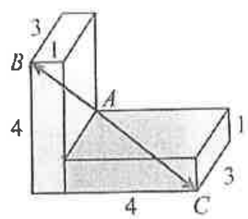
4. 設 $P(a,b,c)$ 其中 $a>0$，$b>0$，$c>0$，已知 P 與 x 軸之距離為 5，P 與 y 軸之距離為 $\sqrt{21}$，P 與 xy 平面之距離為 3，則 P 之坐標為______。

5. 若四點 $(0,0,0)$，$(1,1,1)$，$(a,a,2)$，$(2,1,0)$ 共平面，則 $a=$______。

6. 設 $\overrightarrow{a}=(2,-1,-2)$，$\overrightarrow{b}=(0,-3,4)$，$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$，當 $\overrightarrow{c}$ 平分 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角時，$t=$______。

7. a，b，c 為實數，且 $a+b+c=4$，則 $a^2+2a+b^2-4b+c^2+1$ 之最小值為______。

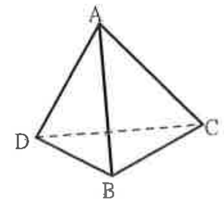
8. 空間中有兩個相同的長方體，長、寬、高分別為 4、3、1 相併接連如附圖，A、B、C 為三個頂點，求ΔABC面積為______。



9. 設 $\overrightarrow{a}=(2,k,1)$，$\overrightarrow{b}=(1,1,2)$，$\overrightarrow{c}=(1,-3,1)$，若由 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 所張開的平行六面體的體積為 10，則 k 的值為______。

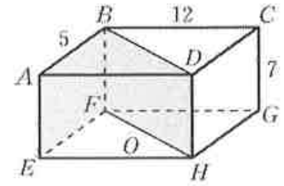
10. 空間中 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 滿足 $|\vec{a}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=24$，$\vec{a}\times\vec{b}=(2,3,-6)$，求 $|\vec{b}|=$______。

11. 如附圖四面體 $ABCD$ 中，$\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DB}=4$，$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=3$，若平面 ABC 與平面 BCD 夾角為 θ，則 $\cos\theta=$______。



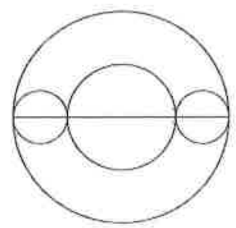
第四部分：素養題10%

1. 設 $ABCD\text{-}EFGH$ 為一長方體(如圖)，其中 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=12$，$\overline{CG}=7$。設半平面 $ABFE$ 與半平面 $BDHF$ 所成二面角的度量 θ，求 $\sin\theta$ 之值＝______。



2. 一直徑為48公尺的圓形草坪，欲將直徑分成三段，並建造分別以此三段為直徑的圓形花圃，如附圖，則：(1)這三個圓形花圃應如何建造，才能使三個圓形花圃的面積和為最小？(請說明)(3分)

   (2) 承上題，求此三圓面積和的最小值為何？(3分)



高雄市正義中學高中部 112 學年度第二學期　第一次期中考數學科試題

高二年 3 班　　座號：＿＿＿姓名：＿＿＿＿＿＿＿

第一部分：單一選擇題　20%（每題 4 分）

1	2	3	4	5
C	A	C	D	D

第二部分：多重選擇題　25%（每答對一選項得 1 分，答錯不倒扣）

1	2	3	4	5
ACE	ADE	BD	BCDE	ABCD

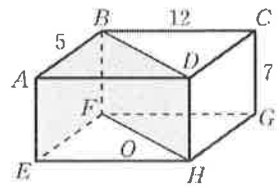
第三部分：填充題 45%

1-(1)	$(-4,-4,-2)$	1-(2)	$(-3,-5,0)$
1-(3)	$\frac{3}{2}\sqrt{26}$	1-(4)	$\sqrt{26}$
2	1	3	$(-2,-4,2)$
4	$(2\sqrt{3},4,3)$	5	2
6	$\frac{3}{5}$	7	-1
8	$\frac{7\sqrt{10}}{2}$	9	$k=0$ 或 -20
10	$\frac{25}{2}$	11	$\frac{2\sqrt{15}}{15}$

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
得分數	8	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	46	50

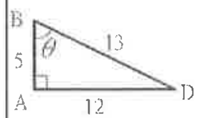
第四部分：素養題 10%（未列式或說明者，該題不予計分）

1. 設 $ABCD$-$EFGH$ 為一長方體（如圖），其中 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=12$，$\overline{CG}=7$。
設半平面 $ABFE$ 與半平面 $BDHF$ 所成二面角的度量 θ，求 sinθ 之值＝＿＿＿。

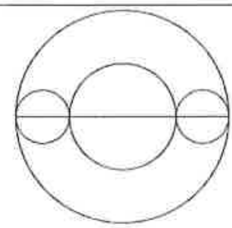


答案：$\frac{12}{13}$

解析：$\overline{BD}=\sqrt{5^2+12^2}=13$，設$\angle ABD=\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{12}{13}$



2. 一直徑為 48 公尺的圓形草坪，欲將直徑分成三段，並建造分別以此三段為直徑的圓形花圃，如附圖，則：
(1)這三個圓形花圃應如何建造，才能使三個圓形花圃的面積和為最小？(請說明)(3 分)
(2) 承上題，求此三圓面積和的最小值為何？(3 分)



如附圖，設三圓形花圃的半徑分別為 x,y,z，
則 $2x+2y+2z=48 \Rightarrow x+y+z=24$，
且三個圓形花圃的面積和為 $\pi(x^2+y^2+z^2)$。
由柯西不等式，得
$(x^2+y^2+z^2)(1^2+1^2+1^2)\geq(x+y+z)^2$
$\Rightarrow (x^2+y^2+z^2)\cdot 3\geq 24^2$
$\Rightarrow (x^2+y^2+z^2)\geq\frac{24^2}{3}=192$
∴ 三個圓形花圃的最小面積和為 192π(平方公尺)
此時 $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1} \Rightarrow$ 令 $x=t$，$y=t$，$z=t$，t 為實數，
代入 $x+y+z=24$，
得 $t+t+t=24 \Rightarrow t=8 \Rightarrow x=8$，$y=8$，$z=8$，
即三個圓形花圃的半徑均為 8 公尺，如附圖。