

高雄市正義中學高中部 112 學年度第二學期第一次期中考數學科試題

【高三社會組】

命題教師：陳坤燦

第一部分：單一選擇題 (每題 5 分，共 20 分)

1. 下面的式子中，何者正確？

- (A)  $\frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots > 2$  (B)  $\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} + \dots < 1$  (C)  $\frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \dots + \frac{3}{4^n} + \dots = 1$   
 (D)  $\frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \dots + \frac{7}{10^n} + \dots > \frac{8}{10}$  (E)  $0.\bar{9} < 1$

2. 下列數列中，何者收斂？

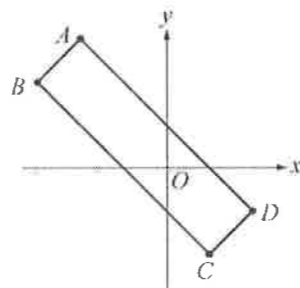
- (A)  $(-1.01)^n$  (B)  $(-1)^n$  (C)  $(0.99)^n$  (D)  $(1.01)^n$  (E)  $(\frac{3}{2})^n$

3. 已知對於每一個正整數  $n$ ，數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $4n+1 \leq 2n \cdot a_n \leq 4n+7$ ，試求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  的值為多少？

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

4. 如附圖，設  $A(a, b)$ ,  $B(c, d)$ ,  $C(m, n)$ ,  $D(r, s)$  為矩形 ABCD 區域內 (含邊界)，且直線 AB 斜率為 1，則  $2x-3y$  的最小值為下列何者？

- (A)  $2a-3b$  (B)  $2c-3d$  (C)  $2m-3n$  (D)  $2r-3s$  (E) 0



第二部分：多重選擇題 (每題 5 分，共 20 分)

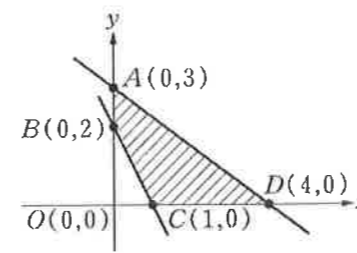
5. 判斷下面各無窮數列中，哪些是發散數列？(多選)

- (A)  $\langle 2^n \rangle$  (B)  $\langle \frac{2n}{n+5} \rangle$  (C)  $\langle n^2 \rangle$  (D)  $\langle 10000-n \rangle$  (E)  $\langle \sin \frac{n\pi}{2} \rangle$

6. 下列各數列中，當  $n$  趨近無限大時，何者趨近於 0？

- (A)  $\langle (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \rangle$  (B)  $\langle (\frac{4}{3})^n \rangle$  (C)  $\langle 0 \rangle$  (D)  $\langle (-1)^n \cdot \frac{2n}{2n+3} \rangle$  (E)  $\langle 2 \cdot (-0.7)^n \rangle$

7. 附圖所示，四邊形 ABCD 及其內部 (斜線部分) 的區域為  $R$ ，則下列敘述何者正確？



- (A) 區域  $R$  由聯立不等式  $\begin{cases} 3x+4y \leq 12 \\ 2x+y \geq 2 \end{cases}$  圍成 (B) 區域  $R$  的面積為 5 (C) 若  $(x, y) \in R$ ，且  $2x=y-k$ ，則  $k$  最大為 3 (D) 若  $(x, y) \in R$ ，且  $2x=y-k$ ，則  $k$  最小為  $-2$  (E) 若  $P(x, y) \in R$  且  $O(0, 0)$ ，則  $\overline{OP}$  最長為  $\frac{12}{5}$

8. 已知數列  $\langle a_n \rangle$ ,  $\langle b_n \rangle$ ,  $\langle c_n \rangle$ ,  $\langle d_n \rangle$ ,  $\langle e_n \rangle$  定義如下：

$$a_n = (-1)^n; b_n = a_n + a_{n+1}; c_n = \left(\frac{-\sqrt{5}}{2}\right)^n; d_n = \frac{1}{3}c_n; e_n = \frac{1}{c_n}; \text{其中 } n=1, 2, 3, \dots$$

下列選項中，試選出會收斂的無窮級數。

- (A)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  (C)  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  (D)  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$  (E)  $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$

第三部分：填充題 (共 45 分)

9. 若一球由高 50 公尺處落下，每次著地後反彈之高度為前次高度之  $\frac{3}{5}$ ，則此球至靜止前所經之距離為 \_\_\_\_\_ 公尺。

10.  $\begin{cases} 3x+y \geq 6 \\ x+y \leq 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ，求  $x-3y$  的最小值 = \_\_\_\_\_。

11. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3 + bn^2 - 3}{5n^2 - 3n + 4} = \frac{3}{5}$ ，試求序對  $(a, b) =$  \_\_\_\_\_。

12. 已知  $P(k-2, 2k+1)$  在聯立不等式  $\begin{cases} x+2y \leq 8 \\ x-y-4 \leq 0 \end{cases}$  的圖形區域內，求  $k$  的範圍為 \_\_\_\_\_。

13. 若無窮等比級數  $1 + \frac{a-2}{3} + (\frac{a-2}{3})^2 + \dots$  收斂於  $S$ ，試求  $a$  的範圍為\_\_\_\_\_。

14. 試求  $1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \dots + 50 \times 52 =$ \_\_\_\_\_。

15. 試求下列各函數的極限或級數和。

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4n - 5}{-2n^2 - 3n + 2} =$ \_\_\_\_\_ (2)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 1}{3^k} =$ \_\_\_\_\_ (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^{n+1} + 5^n}{3^n - 5^{n-1}} =$ \_\_\_\_\_

第四部分：混合題或非選擇題 (佔 15 分，此部分請寫出詳細計算過程)

說明：配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。

非選擇提請由左而右橫式書寫試，作答時需寫出計過程或理由，否則將酌予扣分。

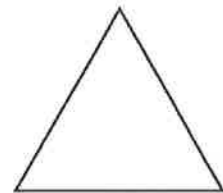
16-17 題為題組

16. 阿坤想從甲、乙兩種維他命丸攝取維他命 A、B、C。如果甲種維他命丸每粒含維他命 A 12 單位、維他命 B 5 單位、維他命 C 6 單位；而乙種維他命丸每粒含維他命 A 6 單位、維他命 B 20 單位、維他命 C 10 單位，而且阿坤每週至少需要維他命 A 36 單位、維他命 B 50 單位、維他命 C 46 單位。已知甲種維他命丸每粒 45 元、乙種維他命丸每粒 50 元，試問阿坤每週應吃甲、乙種維他命丸各幾粒才能使消費最少，而能從其中攝取足夠的維他命 A、B 與 C？(5%)

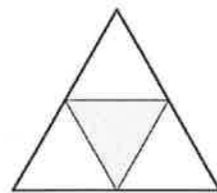
17. 設  $\triangle ABC$  為邊長 1 單位的正三角形 (如圖一)，取三邊中點並兩兩連線，將  $\triangle ABC$  的面積四等分，得到三個直立的正三角形，和一個倒立的正三角形 (如圖二)，將倒立的正三角形移走；其次將剩下的三個直立的正三角形，依照相同的方法分割，並移去其中的倒立正三角形 (如圖三)，按照這樣的規律操作下去，設  $S_n$  為第  $n$  次所移走的倒立正三角形面積的總和，根據前述的規則操作可得無窮數列  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ ，試回答下列各小題：

(1) 設  $\triangle ABC$  的面積為  $a$ ，已知  $S_1 = \frac{1}{4}a$ ，請用  $a$  表示  $S_2, S_3$ 。(5%)

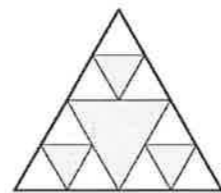
(2) 試求  $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 。(5%)



圖(一)



圖(二)



圖(三)

【高三社會組】

命題教師：陳坤燦

高三年 \_\_\_\_\_ 班 座號： \_\_\_\_\_ 姓名： \_\_\_\_\_

第一部分：單一選擇題 20% (每題 5 分)

1	2	3	4
C	C	C	A

第二部分：多重選擇題 20% (每答對一選項得 1 分，答錯不倒扣)

5	6	7	8
ACDE	ACE	BC	BE

第三部分：填充題 45% (配分如下量尺)

9	10	11	12	13
200	-8	(0, 3)	$-7 \leq k \leq \frac{8}{5}$	$-1 < a < 5$ , 但 $a \neq 2$
14	15(1)	15(2)	15(3)	
45475	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	-5	

答對題數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
得分	7	14	21	28	31	34	37	40	45

第四部分：混合題或非選擇題 (佔 15 分，此部分請寫出詳細計算過程)

說明：本部分共有 1 題組，每一組題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。

非選擇提請由左而右橫式書寫，作答時需寫出計過程或理由，否則將酌予扣分。

16.

答案：甲種維他命丸 1 粒，乙種維他命丸 4 粒

解析：設阿坤每週吃甲、乙種維他命丸各  $x$ 、 $y$  粒，

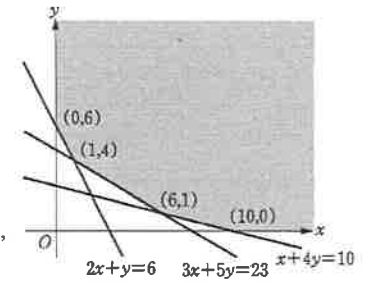
$$\text{則} \begin{cases} 12x+6y \geq 36 \\ 5x+20y \geq 50 \\ 6x+10y \geq 46 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y \geq 6 \\ x+4y \geq 10 \\ 3x+5y \geq 23 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

畫出可行解區域如附圖：

目標函數  $P=45x+50y$  (元)，根據題意， $x$ 、 $y$  必須為整數，而可行解區域各頂點也都是格子點，

$(x, y)$	(10, 0)	(6, 1)	(1, 4)	(0, 6)
----------	---------	--------	--------	--------

$45x+50y$  | 450 | 320 | 245 | 300 當  $(x, y)=(1, 4)$  時， $45x+50y$  有最小值 245，故阿坤每週需吃甲種維他命丸 1 粒，乙種維他命丸 4 粒，花費最少



17.(5%)

$$(1) S_2 = (1 - \frac{1}{4}) a \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16} a,$$

$$S_3 = (a - S_1 - S_2) \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64} a. \quad (5\%)$$

(2) 由(1)知，

$$S_1 = \frac{1}{4} a, S_2 = \frac{3}{16} a = \frac{3}{4} S_1, S_3 = \frac{9}{64} a = \frac{3}{4} S_2 = (\frac{3}{4})^2 S_1,$$

$$S_n = (a - S_1 - S_2 - \dots - S_{n-1}) \cdot \frac{1}{4}$$

$$= [a - \frac{1}{4} a - \frac{3}{16} a - \dots - (\frac{3}{4})^{n-2} \cdot \frac{1}{4} a] \cdot \frac{1}{4}$$

$$= a [1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{16} - \dots - (\frac{3}{4})^{n-2} \cdot \frac{1}{4}] \cdot \frac{1}{4}$$

$$= a \cdot \left\{ 1 - \frac{\frac{1}{4} [1 - (\frac{3}{4})^{n-1}]}{1 - \frac{3}{4}} \right\} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} a \cdot (\frac{3}{4})^{n-1}$$

$$\text{所以 } \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1 - \frac{3}{4}} = a = \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad (5\%)$$