高雄市正義中學高中部112學年度第二學期第一次期中考數學科試題

【高三自然組】 **命題教師：吳孟珍**

第一部分：單一選擇題（每題5分，共20分）

1. 下面的式子中，何者正確？

(A) $\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\ldots+\frac{2^n}{3^n}+\ldots>2$ (B) $\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3^n}+\ldots<1$ (C) $\frac{3}{4}+\frac{3}{4^2}+\ldots+\frac{3}{4^n}+\ldots=1$

(D) $\frac{7}{10}+\frac{7}{10^2}+\ldots+\frac{7}{10^n}+\ldots>\frac{8}{10}$ (E) $0.\overline{9}<1$

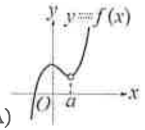
2. 下列無窮級數中，何者收斂？

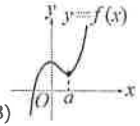
(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1.01)^n$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty}(0.99)^n$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty}1$ (E) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{2})^n$

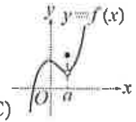
3. 已知對於每一個正整數 n，數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $4n+1\le 2n\cdot a_n\le 4n+7$，試求 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 的值為多少？

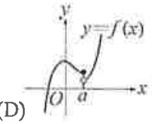
(A)0 (B)1 (C)2 (D)3 (E)4

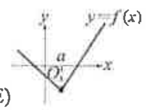
4. 下列各函數 $y=f(x)$ 之圖形中，關於 $\lim_{x\to a}f(x)$，何者不存在？

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

第二部分：多重選擇題（每題5分，共20分）

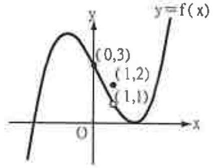
5. 判斷下面各無窮數列中，哪些是發散數列？(多選)

(A) $\langle 2^n\rangle$ (B) $\langle \frac{2n}{n+5}\rangle$ (C) $\langle n^2\rangle$ (D) $\langle 10000-n\rangle$ (E) $\langle \sin\frac{n\pi}{2}\rangle$

6. 下列各數列中，當 n 趨近於無限大時，何者趨近於0？

(A) $\langle(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\rangle$ (B) $\langle(\frac{4}{3})^n\rangle$ (C) $\langle 0\rangle$ (D) $\langle(-1)^n\cdot\frac{2n}{2n+3}\rangle$ (E) $\langle 2\cdot(-0.7)^n\rangle$

7. 附圖是函數 $y=f(x)$ 的局部圖形，則下列哪些選項是正確的？



(A) $\lim_{x\to 0}f(x)=3$ (B) $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$ (C) $\lim_{x\to 1}f(x)=2$ (D) $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

(E) $f(x)$ 在 $x=1$ 處不連續

8. 假設兩數列 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$，對所有正整數 n 都滿足 $b_n+\frac{4n-1}{n}<a_n<3b_n$。已知 $\lim_{n\to\infty}a_n=6$，試選出正確的選項。

(A) $b_n<6-\frac{4n-1}{n}$ (B) $b_n>\frac{4n-1}{2n}$ (C)數列 $\langle b_n\rangle$ 有可能發散 (D) $a_{10000}<6.1$ (E) $a_{10000}>5.9$

第三部分：填充題（共45分）

9. 若一球由高50公尺處落下，每次著地後反躍之高度為前次高度之 $\frac{3}{5}$，則此球至靜止前所經之距離為______公尺。

10. 已知函數 $f(x)=\begin{cases}x^2+ax, x>-1\\ -ax+5, x\le -1\end{cases}$ 為連續函數，則實數 $a=$________。

11. 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn^2-3}{5n^2-3n+4}=\frac{3}{5}$，試求序對$(a，b)=$_________。

12. 函數 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$ 的最大定義域為 $\{x\mid a<x<b\}$，其中 a，b 為整數，試問 $a+b=$_________。

13. 若無窮等比級數 $1+\frac{a-2}{3}+(\frac{a-2}{3})^2+\ldots$ 收斂於 S，試求 a 的範圍為______。

14. 若方程式 $|x+1|+|x+2|=k$ 有二個實根，求實根 k 的範圍__________。

15.試求下列各函數的極限。

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=$________ (2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{|x-2|}=$________ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^{n+1}+5^n}{3^n-5^{n-1}}=$________

第四部分：混合題或非選擇題 (佔 15 分，此部分請寫出詳細計算過程)

說明:配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。

非選擇提請由左而右橫式書寫試，作答時需寫出計過程或理由，否則將酌予扣分。

16-17 題為題組

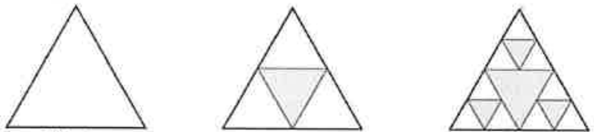
16. (1)設函數 $f(x)=|x-2|$，試繪出函數 $f(x)$ 的圖形。(3%)

(2)求函數 $f(x)=|x-2|$的值域。(2%)

17. 設$\triangle ABC$ 為邊長 1 單位的正三角形 (如圖一)，取三邊中點並兩兩連線，將$\triangle ABC$ 的面積四等分，得到三個直立的正三角形，和一個倒立的正三角形 (如圖二)，將倒立的正三角形移走；其次將剩下的三個直立的正三角形，依照相同的方法分割，並移去其中的倒立正三角形 (如圖三)，按照這樣的規律操作下去，設 S_n 為第 n 次所移走的倒立正三角形面積的總和，根據前述的規則操作可得無窮數列 S_1，S_2，…，S_n，…，試回答下列各小題：

(1) 設 $\triangle ABC$ 的面積為 a，已知 $S_1=\dfrac{1}{4}a$，請用 a 表示 S_2，S_3。(5%)

(2) 試求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n$。(5%)



圖(一) 圖(二) 圖(三)

高雄市正義中學高中部 112 學年度第二學期第一次期中考數學科答案卷

【高三自然組】　　　　命題教師：吳孟珍

高三年＿＿＿班　　座號：＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿

第一部分：單一選擇題 20%　(每題 5 分)

1	2	3	4
C	C	C	D

第二部分：多重選擇題 20%　(每答對一選項得 1 分，答錯不倒扣)

5	6	7	8
ACDE	ACE	ABE	BE

第三部分：填充題 45%　(配分如下量尺)

9	10	11	12	13
200	-2	(0，3)	4	$-1<a<5$，但 $a\neq 2$
14	**15(1)**	**15(2)**	**15(3)**	
$k>1$	3	不存在	-5	

答對題數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
得分	7	14	21	28	31	34	37	40	45

第四部分：混合題或非選擇題 (佔 15 分，此部分請寫出詳細計算過程)

說明:本部分共有 1 題組，每一組題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。

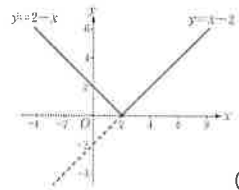
非選擇提請由左而右橫式書寫，作答時需寫出計過程或理由，否則將酌予扣分。

16.

(1) 因為 $x\geq 2$ 時，$f(x)=x-2$；

當 $x\leq 2$ 時，$f(x)=2-x$，

故 $f(x)$ 的圖形是由兩條射線所組成 (如附圖)。



(3%)

(2) $f(x)$ 的圖形是一條折線，有一個折點〔不同斜率之兩線段 (直線、射線) 的交點稱為〔折點〕，根據圖形可得知函數 $f(x)$的值域為 $\{y\mid y\geq 0\}$。(2%)

17.

(1) $S_2=(1-\frac{1}{4})a\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}a$，

$S_3=(a-S_1-S_2)\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{64}a$。　(5%)

(2) 由(1)知，

$S_1=\frac{1}{4}a$，$S_2=\frac{3}{16}a=\frac{3}{4}S_1$，$S_3=\frac{9}{64}a=\frac{3}{4}S_2=(\frac{3}{4})^2S_1$，

$S_n=(a-S_1-S_2-\ldots-S_{n-1})\cdot\frac{1}{4}$

$=[a-\frac{1}{4}a-\frac{3}{16}a-\ldots-(\frac{3}{4})^{n-2}\cdot\frac{1}{4}a]\cdot\frac{1}{4}$

$=a[1-\frac{1}{4}-\frac{3}{16}-\ldots-(\frac{3}{4})^{n-2}\cdot\frac{1}{4}]\cdot\frac{1}{4}$

$=a\cdot\{1-\dfrac{\frac{1}{4}[1-(\frac{3}{4})^{n-1}]}{1-\frac{3}{4}}\}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}a\cdot(\frac{3}{4})^{n-1}$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{S_1}{1-\frac{3}{4}}=a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$。　(5%)